The First International Workshop On Stochastic Calculus And Its Application, IWSCA'2014
A conference in homage to Prof. Bénamar Chouaf
Saida, Algeria 28^{th}-30^{th} May 2014

Approche asymptotique d'une équation aux dérivées partielles issues des équations différentielles stochastiques rétrogrades quadratiques du second ordre

Hammou El-Otmany [1] **M'hamed Eddahbi** [1]

[1] UCA, FST, Département de Mathématiques, B.P. 549, Marrakech, Morocco
hammou.elotmany@ced.uca.ma m.eddahbi@uca.ma

Abstract: This talk is devoted to the theoretical and numerical study of a partial differential equation arising from second order quadratic backward stochastic differential equations. We are looking for the conditions on the quadratic generator in order that our partial differential equation associated with the quadratic backward stochastic differential equations of the second order has a solution. We focus on the asymptotic approach part to solve this type of equation because it doesn't admit a probabilistic solution via the Feynman-Kac's formula, then we use the Crank-Nicholson scheme to discretize this equation. An test case of second order quadratic backward stochastic differential equations associated to this partial differential equation will be presented is considered to treat the convergence process and the properties of the solution.

Keywords: second order quadratic backward stochastic differential equations,partial differential equation, asymptotic approach, Crank-Nicholson scheme.

Résumé : Cet exposé est consacré à l'étude numérique et théorique d'une équation différentielle aux dérivées partielles issues des équations différentielles stochastiques rétrogrades quadratiques du second ordre. On cherche des conditions sur le générateur quadratique pour que notre équation aux dérivées partielles associée aux équations différentielles stochastiques rétrogrades quadratiques du second ordre admet une solution. Nous nous focalisons sur la partie approche asymptotique pour résoudre ce type d'équation puisqu'elle n'admet pas de solution probabiliste via la formule de Feynman-Kac, puis nous utilisons le schéma de Crank-Nicholson pour discrétiser une telle équation. Un cas test d'une équation différentielle stochastique rétrograde quadratique du second order associée à cette equation aux dérivées partielles sera présenter pour traiter la convergence et les propriétés de la solution.

Mots clés : équation différentielle stochastique rétrograde quadratique du second ordre, équation aux dérivées partielles, approche asymptotique, schéma de Crank-Nicholson.

---

1 Introduction

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades ont été introduite par Bismut en 1973 dans le cas où f est linéaire par rapport aux variables Y et Z. Il a fallu attendre le début des années 90 pour avoir le premier résultat d'existence et d'unicité établi par les auteurs E. Pardoux et S. Peng (1991), dans le cas où le générateur f n'est pas linéaire.

La recherche s'est naturellement concentrée sur l'étude de l'équation rétrograde car, dans ce contexte, elle seule posait réellement des difficultés. De nombreuses avancées théoriques ont ainsi été réalisées sur le thème des équations différentielles stochastiques rétrogrades dans beaucoup de travaux qu'il m'est impossible de tous les citer. Néanmoins, signalons les travaux remarquables de E. Pardoux, S. Peng, N. El Karoui, M-C. Quenez, Delarue et Menozzi. Au cours de la dernière décennie, des liens intéressants à équations aux dérivées partielles (EDP) ont été obtenus et la théorie trouvés de larges applications dans la finance mathématique.

Considérons le processus diffusion uni–dimensionnelle $dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$ avec μ et σ vérifient les conditions standard de régularité. On considère l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} -\partial_t v(t,x) + f\left(t, x, v(t,x), Dv(t,x), D^2 v(t,x)\right) = 0 \ sur \ \ [0,T) \times \mathbb{R}, \\ v(T,x) = g(x) \end{cases} \tag{1}$$

associée à l'équation différentielle stochastique rétrograde du second ordre -2EDSR en abrégé- (voir [1]) :

$$\begin{cases} dY_t = f\left(t, X_t, Y_t, Z_t, \Gamma_t\right) dt + Z_t' \circ dX_t, \qquad t \in [0,T) \\ dZ_t = A_t dt + \Gamma_t dX_t, \qquad t \in [0,T) \\ Y_t = g(X_t) \end{cases} \tag{2}$$

où $\circ$ symbole de Stratonovich Chiredito *et al* [1]. ont prouvé l'unicité de la solution de 2EDSR (2) lorsque l'EDP (1) admet une solution de viscosité dont le cas où le générateur f est linéaire, non-linéaire en y et g est une fonction régulière.

Notre but est de résoudre (2) avec un générateur quadratique en γ (notée en abrégée 2EDSRQ) continue de $[0,T] \times \mathbb{R}^4$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que

$$f_q\left(t, x, y, z, \gamma\right) = ry - rxz - \alpha\sigma^2 x^2 \gamma^2 - \frac{\sigma^2}{2} x^2 \gamma, \quad r, \alpha, \sigma \in \mathbb{R}^+.$$

c'est–à–dire chercher la solution de l'EDP associée à 2EDSRQ suivante :

$$\begin{cases} -\partial_t u + ru - rx\partial_x u - \alpha\sigma^2 x^2 \left(\partial_{xx} u\right)^2 - \frac{\sigma^2}{2} x^2 \partial_{xx} u = 0 \text{ sur } \ [0,T) \times \mathbb{R} \\ u(T,x) = g(x) \end{cases} \tag{3}$$

Puisque le générateur quadratique f_q ne vérifie pas les hypothèse de l'article [1], nous avons proposé une approche asymptotique pour résoudre (3). C'est à dire, nous nous intéressons à chercher la solution de l'EDP(3) sous la forme

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \cdots,$$

puis, on cherche des fonctions $u_i \ : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et suffisamment régulières vérifiant certaines propriétés et on prouve que la solution u admet une limite lorsque ε tend vers 0. Pour ce faire, nous avons mis au point un schéma de discrétisation en différences finies, en particulier le schéma de Crank-Nicholson [2], pour résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles associées aux EDSR du second ordre dans le but de déterminer le prix d'une option.

Pour mettre en évidence l'utilité d'étudier ces objets mathématiques qui interviennent dans la finance, nous nous concentrerons principalement sur le problème des options dans le modèle de Black–Scholes avec un intérêt tout particulier pour les options européennes pour valider numériquement le choix de notre méthode.

Nous avons prouvé que la méthode de Crank–Nicholson est inconditionnellement stable et la solution de l'EDP (3) est approché par la solution de Black–Scholes lorsque la paramètre α est proche de 0 et l'ordre d'approximation du prix est d'ordre 2.

2 Main results

Theorem 1 *Supposons que le générateur quadratique f_q est elliptique et uniformément lipschitzien sur le domaine $\gamma > 0$ et g est au plus à croissance polynomiale. Supposons que l'EDP* (3) *possède une solution aux sens de viscosité. Alors, 2EDSRQ avec le générateur quadratique f_q admet au moins une solution. En plus si 2EDSRQ admet une solution, alors l'EDP associée à 2EDSRQ admet une unique solution et satisfait $Y_t = u(t, X_t)$.*

3 Conclusion

En guise de conclusion, nous nous contenterons de la force de l'approche asymptotique utilisée pour résoudre l'équation aux dérivées partielles associée à 2EDSRQ puisque cette dernière n'admet pas de solution par la formule de Feynmann-Kac. Nous avons prouvé que l'erreur de convergence de l'approche utilisée est optimal et que la solution converge vers la solution du modèle de Black-Scholes pour des valeurs α proche de 0. En plus, nous avons démontré des résultats d'existence de la solution pour notre 2EDSRQ sous certaines hypothèses plus fortes.

Références

[1] P. Cheredito, M. Soner, N. Touzi, N. Victoir. Second Order Backward Stochastic Differential Equations and Fully Non-Linear Parabolic PDEs. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, pages 1081–1110, July 2007.

[2] M. Gilli. Numerical Methods in Finance. *Department of Econometrics University of Geneva and Swiss Finance Institute : Spring*, 2008.