APPROCHE ASYMPTOTIQUE D'UNE EDP ISSUE D'UNE 2EDSRQ

Hammou El-Otmany & M'hamed Eddahbi

Université Cadi Ayad des Sciences
Faculté des Sciences et Techniques - LaMSAFA
Workshop International sur le Calcul Stochastique et Ses Applications 2014

28 - 30 Mai 2014

Plan

Motivations

- ☞ Modéliser des produits dérivés
- ☞ Calculer et corriger les prix des produits dérivés
- ☞ Calculer la sensibilité aux variations de certains paramètres
- ☞ Calibrer des modèles

EDSR introduite par Bismut en 1973

$$Y_t = \xi + \int_t^T f\left(s, Y_s, Z_s\right) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \leq t < T$$

où

- $(W_t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien de dimension d
- $Y_T = \xi$ est une variable aléatoire de carrée intégrable
- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: espace de probabilité
- $\mathbb{F}^{s,T} = (\mathcal{F}_t^s)_{t\in[s,T]} = \sigma\left(W_t - W_s, t \in [s, T]\right)$
- $\mathcal{S}^d$ est l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}^d$

Pardoux–Peng, 1990, f est uniformément lipschitzienne en y et z, $\cdots$

2EDSR introduite par Cheredito, Soner, Touzi et Victoir

$$dY_t = f\left(t, X_t, Y_t, Z_t, \Gamma_t\right) dt + Z_t' \circ dX_t, \quad t \in [0, T),$$
$$dZ_t = A_t dt + \Gamma_t dX_t, \quad t \in [0, T),$$
$$Y_T = g\left(X_T\right)$$

où

- $dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x$
- f est un générateur défini de $[0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^d$ vers $\mathbb{R}$
- $\circ$ symbole de Stratonovich tel que

$$Z_t' \circ dX_t = Z_t' dX_t + \frac{1}{2} d\left\langle Z, X \right\rangle_t$$

- $g \, : \, \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est continue (payoff d'un produit dérivée)
- Inconnu : $(Y_t, Z_t, \Gamma_t, A_t)_{t \in [0,T)}$

Équation aux dérivées partielles associée à 2EDSR

$$v_t(t,x) + f\left(t,x,v(t,x),Dv(t,x),D^2v(t,x)\right) = 0 \; sur \quad [0,T) \times \mathbb{R}^d$$

$$v(T,x) = g(x) \qquad x \in \mathbb{R}^d$$

où la fonction $v : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est continue telle que

- $v_t,\ Dv,\ D^2v$ et $\mathcal{L}Dv$ existent et sont continues sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ où

$$\mathcal{L}v(t,x) = v_t(t,x) + \frac{1}{2}Tr\left[D^2v(t,x)\sigma(x)\,\sigma(x)'\right]$$

- La fonction v résout l'équation aux dérivées partielles

P. Cheredito, M. Soner, N. Touzi, N. Victoir. Second Order Backward Stochastic Differential Equations and Fully Non-Linear Parabolic PDEs, 2007.

Hypothèses sur le générateur f

1. f est uniformément lipschitzienne en y
2. Il existe des constantes $F, p_2 \geq 0$ telles que
$$|f(t,x,y,z,\gamma)| \leq F(1+|x|^{p_2}+|y|+|z|^{p_2}+|\gamma|^{p_2}) \quad \forall (t,x,y,z,\gamma)$$
3. Pour tout $(t,x,y,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et $\gamma, \gamma' \in \mathbb{S}^d$, on a
$$f(t,x,y,z,\gamma) \geq f(t,x,y,z,\gamma') \qquad \text{si} \qquad \gamma \leq \gamma'$$
4. Il existe des constantes $G,\ p_3 \geq 0$ telles que
$$|g(x)| \leq G(1+|x|^{p_3}) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$
5. EDP satisfait le principe de comparaison sur $[s,T)$ d'exposant de croissance $q = \max\{p_2,\ p_3,\ p_2p_4,\ p_4+2\}$

Théorème (Unicité de la solution)

Supposons $\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_5$ sont vérifiées et il existe $(s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$ tel que 2EDSR correspondant à $(X^{s,x}, f, g)$ admette une solution $(Y^{s,x}, Z^{s,x}, \Gamma^{s,x}, A^{s,x})$ avec $Z^{s,x} \in \mathcal{A}^{s,x}$. L'EDP associée à 2EDSR

- admet une unique solution de viscosité v sur $[s,T) \times \mathbb{R}^d$ à croissance d'exposant $q = \max\{p_2, p_3, p_2p_4, p_4+2\}$,
- v est continue sur $[s,T) \times \mathbb{R}^d$,
- le processus $Y^{s,x}$ est de la forme $Y_t^{s,x} = v\left(t, X_t^{s,x}\right), t \in [s,T]$,

En particulier $(Y^{s,x},\ Z^{s,x},\ \Gamma^{s,x},\ A^{s,x})$ est solution de 2EDSR correspondant à $(X^{s,x},\ f,\ g)$ avec $Z^{s,x} \in \mathcal{A}^{s,x}$.

où

$$\mathcal{A}^{s,x} := \cup_{m\geq 0}\left\{ \max\{|Z_t|, |A_t|, |\Gamma_t|\} \leq m(1+|X_t^{s,x}|^{p_4}), \forall\, r,t \in [s,T] \right\}$$

2EDSR quadratique

$$dY_t = f_q\left(t, X_t, Y_t, Z_t, \Gamma_t\right) dt + Z_t' \circ dX_t, \quad t \in [0, T),$$
$$dZ_t = A_t dt + \Gamma_t dX_t, \quad t \in [0, T),$$
$$Y_T = g\left(X_T\right)$$

où $f_q\left(t, x, y, z, \gamma\right) = a_1 L(x, y) + a_2 Q(x) + C^2(x)\left(a_3 \gamma^2 + a_4 \gamma\right),$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$$

Équation aux dérivées partielles associée à 2EDSRQ (*)

$$v_t(t, x) + f_q\left(t, x, v(t, x), Dv(t, x), D^2 v(t, x)\right) = 0 \; sur \quad [0, T) \times \mathbb{R}^d$$

$$v(T, x) = g(x) \qquad x \in \mathbb{R}^d$$

Conditions sur le générateur f_q sur $\gamma > 0$

1. f_q est uniformément lipschitzienne en y
2. Il existe des constantes $C, p_2 \geq 0$ telles que

$$\left| f_q\left(t,x,y,z,\gamma\right) \right| \leq C(1+|x|^{p_2}+|y|+|z|^{p_2}+|\gamma|^{p_2}) \quad \forall\left(t,x,y,z,\gamma\right)$$

3. f_q est strictement décroissante et concave en γ pour tout $\gamma > 0$
4. Il existe des constantes $G,\ p_3 \geq 0$ telles que

$$|g(x)| \leq G(1+|x|^{p_3}) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

5. EDP satisfait le principe de comparaison sur $[s, T)$ d'exposant de croissance $q = \max\{p_2,\ p_3,\ p_2p_4,\ p_4 + 2p_1\}$

Théorème (Unicité de la solution)

Supposons que le générateur quadratique f_q vérifie les conditions précédentes sur le domaine $\gamma > 0$ et g est au plus à croissance polynomiale. Supposons que l'EDP(*) possède une solution aux sens de viscosité. Alors, 2EDSRQ avec le générateur quadratique f_q admet au moins une solution. En plus si 2EDSRQ admet une solution, alors l'EDP associée à 2EDSRQ admet une unique solution et satisfait $Y_t = u(t, X_t)$.

Données de marché (dimension $d = 1$)

Actif risqué : $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t.$
Actif sans risque : $dS_t^0 = rS_t^0 dt,\, S_0^0 = 1.$
Classe des équations différentielles stochastiques :

$$\begin{cases} dV_t = \left(rV_t - \alpha\gamma_t^2\right) dt + \phi_t \sigma S_t dW_t, & t \in [0,T) \\ d\phi_t = \beta_t dt + \gamma_t dW_t, \qquad t \in [0,T) \\ V_T = g(S_T) \end{cases}$$

où

- $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$,
- γ_t^2 : Variation quadratique de la quantité d'actif risqué,
- $\alpha\gamma_t^2$: Taxe sur les flux financiers proportionnelle à γ_t^2,
- g : payoff de l'option européenne (*Call* ou *Put*).

Formulation de 2EDSR

Selon le formalisme de Cheredito et al., nous avons :

$$\begin{cases} dV_t = f\left(t, S_t, V_t, \phi_t, \Gamma_t\right) dt + \phi_t \circ dS_t, & t \in [0, T) \\ d\phi_t = A_t dt + \Gamma_t dS_t, \qquad t \in [0, T) \\ V_T = g(S_T) \end{cases}$$

où $f\left(t, x, y, z, \gamma\right) = ry - rxz - \alpha\sigma^2 x^2 \gamma^2 - \frac{\sigma^2}{2} x^2 \gamma$

Problématique

Trouver

- ϕ_t la stratégie du financement

$$\rightsquigarrow (V_t, \phi_t, \Gamma_t, A_t)\,?$$

- V_t prix de l'option européenne

Vérification des hypothèses de Cheredito et al.

Le générateur f est quadratique en γ :

$$f\left(t,x,y,z,\gamma\right) = ry - rxz - \alpha\sigma^2x^2\gamma^2 - \frac{\sigma^2}{2}x^2\gamma$$

- Continuité — OK
- Lipschitzienneté en y — OK
- Croissance linéaire en x, z et γ — OK
- Continuité et croissance linéaire du payoff — OK
- Décroissance en γ — Non
- Comparaison principale. — Non

$\rightsquigarrow$ Théorème d'unicité de la solution. — Non

Vérification des nouvelles conditions pour f_q

Le générateur f est quadratique en γ :

$$f(t,x,y,z,\gamma) = ry - rxz - \alpha\sigma^2 x^2 \gamma^2 - \frac{\sigma^2}{2} x^2 \gamma$$

- Continuité $\boxed{\text{OK}}$
- Lipschitzienneté en y. $\boxed{\text{OK}}$
- Croissance linéaire en x, z et γ. $\boxed{\text{OK}}$
- Continuité et croissance linéaire du payoff. $\boxed{\text{OK}}$
- Convexité et décroissance en $\gamma > 0$. $\boxed{\text{OK}}$
- Comparaison principale. $\boxed{\text{OK}}$

$\rightsquigarrow$ Théorème d'unicité de la solution. $\boxed{\text{OK}}$

Équation aux dérivées partielles associée à notre 2EDSRQ en ε

$$\mathcal{L}_{BS} u^{\varepsilon}(t,x) = \varepsilon \sigma^2 x^2 \left(\frac{\partial^2 u^{\varepsilon}}{\partial x^2}(t,x) \right)^2 \qquad \text{sur} \quad [0,T) \times \mathbb{R},$$

où

- la condition terminale est $u^{\varepsilon}(T,x) = g(x)$
- $\mathcal{L}_{BS}$ est l'opérateur de Black–Scholes donné par

$$\mathcal{L}_{BS} = -\frac{\partial}{\partial t} + r\left(\cdot - x\frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Difficulté

Il n'y pas d'approche probabiliste de la solution de l'EDP

Solution proposée

$$\begin{aligned} u^{\varepsilon}(t,x) &= u_0(t,x) + \varepsilon u_1(t,x) + \varepsilon^2 u_2(t,x) + \cdots\cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i(t,x) \end{aligned}$$

EDP à résoudre

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \mathcal{L}_{BS} u_i = \varepsilon \sigma^2 x^2 \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right)^2$$

Algorithme 1

$\mathcal{L}_{BS} u_0 = 0, u(T,\cdot) = g(\cdot)$,

pour $i = 1, 2, \cdots ; j = 0, 1, 2, \cdots$

pour $k = \frac{i-1}{2}$

si $k \in \mathbb{N}$ *alors*

$$\mathcal{L}_{BS} u_i = \sigma^2 x^2 \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}\right)^2 + 2\sigma^2 x^2 \sum_{j<2k} \varepsilon^j \frac{\partial^2 u_{2k}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2},$$

$$u(T,.) = 0$$

$2k + j = i - 1,$

sinon

$$\mathcal{L}_{BS} u_i = 2\sigma^2 x^2 \sum_{j<2k} \varepsilon^j \frac{\partial^2 u_{2k}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2},$$

$$u(T,\cdot) = 0$$

$2k + j = i - 1$ *et* ε *tend vers* 0.

Étape de la résolution

EDP 1

$$\mathcal{L}_{BS} u_0 = 0, \quad u_0 (T, x) = g(x)$$

- EDP de Black Scholes
- EDP admet une solution analytique

EDP 2

$$\mathcal{L}_{BS} u_1 = \sigma^2 x^2 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right)^2, \quad u_1 (T, x) = 0$$

- EDP de Black Scholes avec le second membre
- EDP n'admet pas de solution explicite

Résolution numérique de l'EDP

Soyons d'accord sur les notations :

$$\begin{array}{ll} \downarrow \textit{ temps} & \\ U_j^n & n = 0 \quad \textit{condition initiale} \\ \uparrow \textit{ espace} & \end{array}$$

$j = 0$ *et* M *: conditions limites au bord du domaine*

n *varie de* 1 *à* N $\qquad$ j *varie de* 0 *à* M

Schéma de Crank–Nicholson

$$\begin{cases} j = 0, 1, 2..., M; \quad n = 0, 1, 2, \cdots N \\ \frac{u_j^{n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} r u_j^{n+1} - \frac{1}{2} r x_j \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{2} x_j^2 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} = C^n \\ C^n = \frac{u_j^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} r u_j^n + \frac{r}{2} x_j \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{2} x_j^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + \frac{1}{2} \left(F_j^n + F_j^{n+1} \right) \\ u_0 = u_{M+1} = 0 \end{cases}$$

Forme matricielle du schéma de Crank–Nicholson

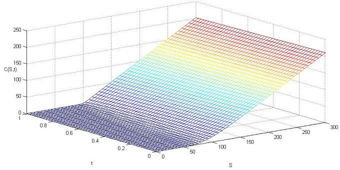
$$\left(I+\frac{1}{2}A\right)U_{new}=\left(I-\frac{1}{2}A\right)U_{old}+B$$

où $\quad U_{new}=\left(u_1^{n+1},u_2^{n+1},\cdots,u_M^{n+1}\right)^t;\quad U_{old}=\left(u_1^{n},u_2^{n},\cdots,u_M^{n}\right)^t,$

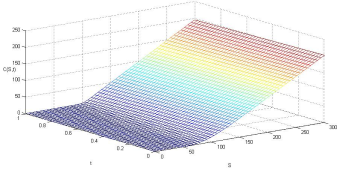
$$A=\begin{pmatrix}\beta_1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0\\ \alpha_1 & \ddots & \gamma_2 & \ddots & \vdots\\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \gamma_M\\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_M & \beta_M\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\frac{\Delta t}{2}\left(F_1^n+F_1^{n+1}\right)\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\\ \frac{\Delta t}{2}\left(F_M^n+F_M^{n+1}\right)\end{pmatrix}$$

$$\beta_j=\left(r+\left(\frac{\sigma x_j}{h}\right)^2\right)\Delta t;\ \alpha_j=\left(\frac{rx_j}{2h}-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma x_j}{h}\right)^2\right)\Delta t;\ \gamma_j=-\left(\frac{rx_j}{2h}+\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma x_j}{h}\right)^2\right)\Delta t$$

analytique et numérique de Black–Scholes



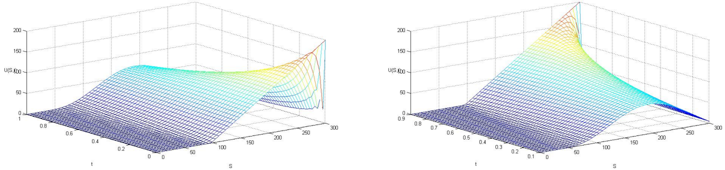
(a) Sol. analytique



(b) Sol. numérique

Fig : Solutions analytiques et numériques de BS :
$\sigma = 0.3, r = 0.1, T = 1\, ans, M = N = 50, K = 100$

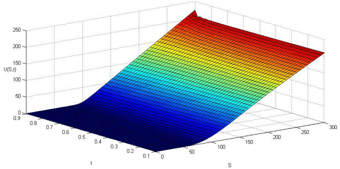
Solution de l'EDP 2 et l'EDP 3



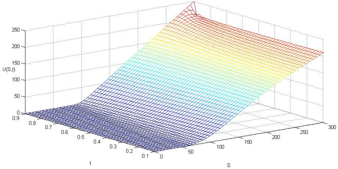
(a) Solution u_1 (b) Solution u_2

Fig : Graphes en 3D des prix de l'étape 2 et 3

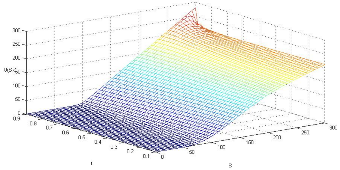
Prix approché de l'option pour différentes valeurs de ε



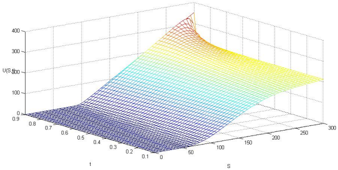
(a) $\varepsilon = 0.1$



(b) $\varepsilon = 0.2$



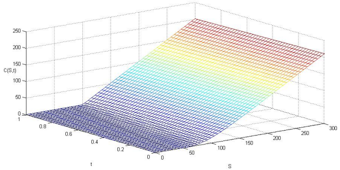
(c) $\varepsilon = 0.3$



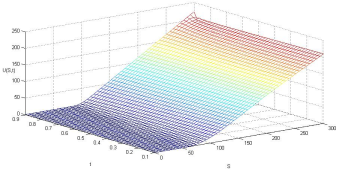
(d) $\varepsilon = 0.5$

Fig : Prix $u^\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3$

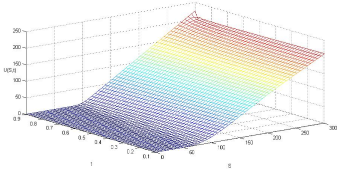
Prix approché de l'option



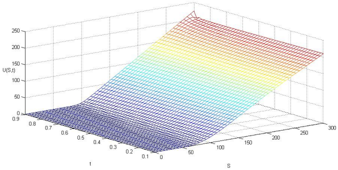
(a) Prix de Black Scholes u_0



(b) Solution $u_0 + \varepsilon u_1$



(c) Solution $u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2$



(d) Solution $u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3$

Fig : Graphes représentatifs des prix à l'ordre $0, 1, 2$ et 3 en ε

Convergence du prix approché vers le prix de BS

Valeur de ε	Erreur $u^{2,\varepsilon}$ et $u^{3,\varepsilon}$
0.1	$1.67324.10^{-9}$
0.2	$3.98077.10^{-7}$
0.3	$4.35102.10^{-3}$
0.5	$1.23501.10^{-1}$
10^{-3}	$2.34200.10^{-12}$
10^{-4}	$3.87100.10^{-15}$
10^{-7}	$1.43007.10^{-21}$

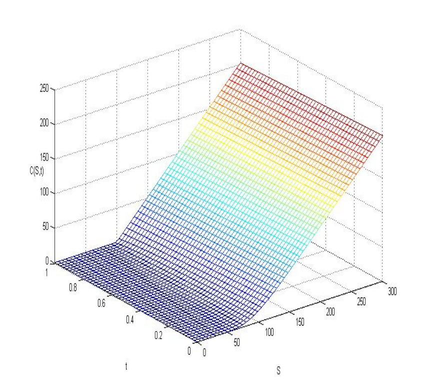
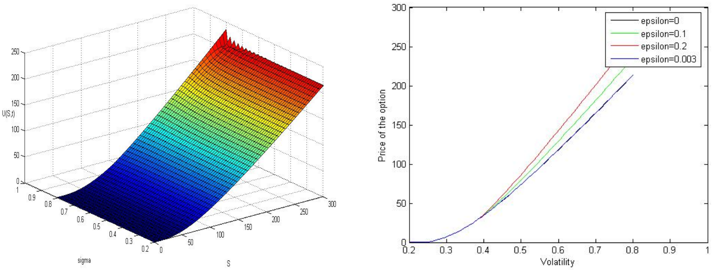


Fig : Prix $u^{\varepsilon}; \varepsilon = 0.0001$

Propriété de croissance en volatilité du prix



(a) Nappe du prix u en fonction de σ (b) Prix u en fonction de σ

Fig : Prix $u^{\varepsilon} = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2$; $\varepsilon = 0.1; \ 0.1 \le \sigma \le 0.8$

Stratégie de couverture : delta de l'option

Le delta de la couverture est donné par

$$\Phi_t = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}(t, S_t) = \Delta_{BS} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial x}(t, S_t) + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial x}(t, S_t)$$

où

- $\Delta_{BS} = \frac{\partial u_0}{\partial x}(t, S_t)$,
- u_1 est solution $\mathcal{L}_{BS} u_1 = \sigma^2 x^2 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right)^2, \quad u_1 (T, x) = 0 \quad \forall x > 0$
- u_2 vérifie $\mathcal{L}_{BS} u_2 = 2\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad u_2 (T, x) = 0 \quad \forall x > 0.$

Algorithme utilisé pour le calcul nuémrique

- Discrétisation de $[0, T]$ en N points avec $t_i = \frac{T}{N}$.
- Génération de gaussiennes et calcul de l'actif risqué par Black Scholes

$$S_{\frac{i+1}{N}} = S_{\frac{i}{N}} \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{1}{N} + \sigma\left(W_{\frac{i+1}{N}} - W_{\frac{i}{N}}\right)\right).$$

- Calcul de la stratégie à l'instant t_i.

$$\Phi_{t_i} = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}(t_i, S_{t_i}).$$

- Calcul de $V_{t_{i+1}}$ par

$$V_{t_{i+1}} = V_{t_i} + \Phi_{t_i} S_{t_{i+1}} + \Phi^0_{t_i} S^0_{t_{i+1}} - \varepsilon\left(\Phi_{t_{i+1}} - \Phi_{t_i}\right)^2.$$

Valeur de Φ

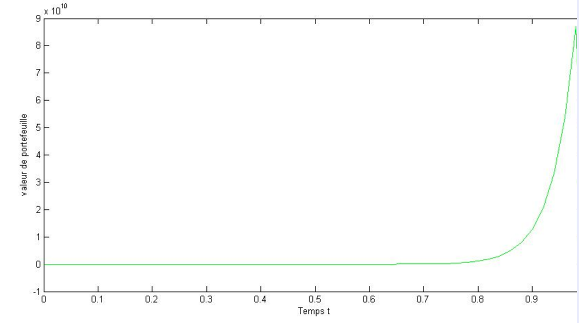


Fig : Valeur de portefeuille V en fonction de temps t

Conclusions

- ☞ Schéma de Crank–Nicholson est inconditionnellement stable
- ☞ Croissance en volatilité du prix de l'option
- ☞ Ordre d'approximation du prix est 2
- ☞ Lorsque ϵ est suffisamment petit, le prix approché de l'option converge vers celui de Black–Scholes

Perspectives

- ✍ Existence et unicité de solution pour 2EDSR quadratique en y et γ
- ✍ Article encours de rédaction

Discrétisation de 2EDSRQ

$$\begin{cases} S_s^{s,x} = x, \quad V_t^N = g\left(S_t^{s,x}\right), \quad \phi_t^N = g_x\left(S_t^{s,x}\right), \\ \quad \forall \quad 1 \leq n \leq N, S_{t_n}^{s,x} = x \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t_n + \sigma W_{t_n}\right], \\ V_{t_{n-1}}^N = \mathbb{E}\left(V_{t_n}^N \middle| S_{t_{n-1}}^{s,x}\right) - \varphi\left(t_{n-1}, S_{t_{n-1}}^{s,x}, V_{t_{n-1}}^N, \phi_{t_{n-1}}^N, \Gamma_{t_{n-1}}^N\right)(t_n - t_{n-1}) \\ \phi_{t_{n-1}}^N = \frac{1}{\sigma(t_n - t_{n-1}) S_{t_{n-1}}^{s,x}} \mathbb{E}\left(\left(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}\right) V_{t_n}^N \middle| S_{t_{n-1}}^{s,x}\right), \\ \Gamma_{t_{n-1}}^N = \frac{1}{\sigma(t_n - t_{n-1}) S_{t_{n-1}}^{s,x}} \mathbb{E}\left(\left(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}\right) \phi_{t_n}^N \middle| S_{t_{n-1}}^{s,x}\right), \\ A_{t_{n-1}}^N = \frac{1}{t_n - t_{n-1}} \mathbb{E}\left(\phi_{t_n}^N \left(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}\right)^2 \middle| S_{t_{n-1}}^{s,x}\right) - r S_{t_{n-1}}^{s,x} \Gamma_{t_{n-1}}^N - \phi_{t_{n-1}}^N \end{cases}$$

où

$$\varphi\left(t, S_t^{s,x}, V_t, \phi_t, \Gamma_t\right) = r V_t + \alpha \sigma^2 \left(S_t^{s,x}\right)^2 \Gamma_t^2$$

et $t_n = s + \frac{n(T-s)}{N}$.

Un très grand merci aux organisateurs