ETUD'+, Centre de formation
Et Cours de soutien
11 place de la Tour
641610, Morlaàs

STID $1^{\text{ère}}$ **année - INTRODUCTION AU CALCUL DES PROBABILITÉS**

ETUD'+, Centre de formation
Et Cours de soutien
11 place de la Tour
641610, Morlaàs

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 2

Variables aléatoires discrètes

Enseignant-Formateur : H. El-Otmany **A.U.** : 2019-2020

Exercice n°1 Une entreprise de fournitures industrielles commercialise des pièces de rechange pour pompes hydrauliques. On a relevé sur une longue période le nombre de pièces de type A vendues. L'étude statistique permet d'admettre que la variable aléatoire X qui associe à un jour ouvrable choisi au hasard pendant un mois le nombre de pièces vendues ce jour-la' a une loi de probabilité définie par le tableau suivant.

Nombre de ventes x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0.10	0.16	0.25	0.30	0.13	0.05	0.01

On donnera les valeurs approchés arrondies à 10^{-2} près des résultats.

1. Représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable aléatoire X.
2. Calculer l'espérance $\mathbf{E}(X)$. Que représente $\mathbf{E}(X)$?
3. Calculer la variance et l'écart-type de X.

Exercice n°2 On considère une variable aléatoire discrète X qui ne prend que les valeurs $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ telle que

$$P(X = -2) = P(X = 2) = a,$$
$$P(X = -1) = P(X = 1) = 2a,$$
$$P(X = 0) = 4a.$$

1. Déterminer a, $P(X > -1)$, $P(X^2 \leqslant 4)$
2. Calculer $P(X = 1|X \geqslant 0)$, $P(X = -1|X \geqslant 0.5)$.
3. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(X^2)$.

Exercice n°3 On dispose d'un casier qui contient deux urnes. La première contient 5 boules numérotées 2, 2, 4, 4 et 6. La deuxième contient 3 boules numérotées 1, 1 et 3. On tire au hasard une boule dans chaque urne, et l'on note X la somme des deux numéros obtenus. Déterminer

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
2. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

Exercice n°4 Dans un examen sous forme d'un QCM composé de neuf questions à trois choix multiples chacune, un étudiant a répondu au hasard à cet examen. On désigne par la variable aléatoire X le nombre de réponses correctes.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
2. Déterminer la probabilité que l'étudiant obtienne au moins 8 bonnes réponses.
3. Calculer l'espérance et l'écart-type de sa note si chaque réponse correcte rapporte un point.
4. Supposons maintenant que l'examen ne comporte que neuf questions, trouver le nombre minimal de choix multiples pour que la probabilité d'obtenir, en répondant au hasard, une note égale ou supérieure à 1 ne dépasse pas 50%.

Exercice n°5 On jette deux fois un dé. Quelles sont les valeurs que peuvent prendre les variables aléatoires suivantes et donner leurs fonctions de répartition associées :

1. le plus grand des deux chiffres obtenus.
2. le plus petit des deux chiffres obtenus.

Indication : On remarquera que si le maximum des deux valeurs lues sur les dés est plus petit qu'une valeur k fixée alors les deux dés ont des valeurs plus petites que la valeur k.

Exercice n°6 Dans une bibliothèque universitaire, quatre catégories de livres sont présentes : les livres d'informatique, les livres de finance, les livres de mathématiques et bien sûr les livres de physiques. Au total cela représente 90 différents livres, 30 d'informatique, 15 de finance, 25 de mathématiques et 20 de physiques. Dans cet exercice, on assume que la probabilité pour un livre tiré au hasard d'être abîmé est égale à 0.4. On donnera, pour chaque résultat, la valeur exacte et une valeur approchée 10^{-2} près.

Dans un premier temps, on tire au hasard avec remise des livres jusqu'à en trouver un livre qui soit abîmé. On désigne par X_1 la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires.

1. Préciser le support de X_1 et donner sa loi de probabilité ainsi que son nom.
2. Calculer $P(X_1 = 5)$.

Finalement, on tire au hasard avec remise des livres jusqu'à en trouver deux livres qui soient abîmés. Ici, on considère la variable aléatoire X_2 qui correspond au nombre de tirages nécessaires.

3. Déterminer le support de X_2 et sa loi de probabilité ainsi que son nom.
4. Déterminer $P(X_2 = 5)$.

Exercice n°7 Un appareil électronique de jeux au hasard fonctionne comme suit : on introduit une pièce de 10 euros et trois roues tournent; ces roues présentent les dix chiffres de 0 à 9 et chaque roue s'arrête en montrant un chiffre au hasard; si les trois chiffres sont différents, le joueur perd sa mise, s'il y a un double, le joueur touche 20 euros et s'il y a un triplet, le joueur touche x euros.

1. Déterminer le nombre de possibilités d'obtenir trois chiffres différents ? exactement deux chiffres identiques ? trois chiffres identiques ?
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire X où X représente le gain du joueur.
3. Jusqu'à quelle valeur de x le jeu est-il profitable au propriétaire de l'appareil ?

Exercice n°8

1. Calculer $P(X = 4)$ si X suit la binomiale $\mathcal{B}(5, 0.4)$ et $P(Y \leqslant 2)$ si $Y \sim (3, 0, 2)$.
2. Déterminer α pour que $P(Z \leqslant \alpha) \leqslant 0.8 \leqslant P(Z \leqslant \alpha + 1)$ si $Z \sim \mathcal{B}(5, 0, 2)$.

Exercice n°9 Lors de la livraison d'un nombre très important de machines frigorifiques dont 2% sont défectueuses, on prélève au hasard un échantillon de 60 machines.

La population est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 60 machines. On a donc une succession de 60 épreuves indépendantes.

On note X la variable aléatoire qui associe, à chaque prélèvement de 60 machines, le nombre de machines défectueuses.

1. Montrer que X suit une loi binomiale.
2. Calculer la probabilité des événements suivants :
   — A :=" aucune machine défectueuse".
   — B :=" une seule machine défectueuse".
   — C :=" au moins trois machines défectueuses".