ETUD'+, Centre de formation
Et Cours de soutien
11 place de la Tour
641610, Morlaàs

STID $1^{\text{ère}}$ **année - INTRODUCTION AU CALCUL DES PROBABILITÉS**

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 3

Variables aléatoires continues

ETUD'+, Centre de formation
Et Cours de soutien
11 place de la Tour
641610, Morlaàs

Enseignant-Formateur : H. El-Otmany **A.U.** : 2019-2020

Exercice n°1 On considère une fonction f telle que

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si } a \leqslant x \leqslant b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de k pour que la fonction f soit une densité de probabilité.
2. On pose $a = 1$ et $b = 5$. Représenter graphiquement la densité de probabilité f.
3. Supposons que X suit la loi uniforme sur $[1, 5]$ de densité f. Calculer et représenter le fractile d'ordre 0.5 et d'ordre 0.95.
4. Calculer et représenter graphiquement la fonction de répartition F de X.
5. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $V(X)$ pour a et b quelconque.
6. On suppose $a > 0$, calculer $\mathbf{E}(X^2)$ et $V(X^2)$.

Exercice n°2 On considère X une variable aléatoire ayant une densité de probabilité f. Montrez que $Y = aX$ $(a > 0)$ admet une densité $g(x) = \frac{1}{a} f\left(\frac{1}{a}\right)$.

Exercice n°3 Dans un parc national, un guide touristique propose quotidiennement l'observation de chamois venant s'abreuver dans lac au coucher du soleil. Le temps d'attente du groupe X, en heures, avant l'arrivée des animaux, suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.
Déterminer $P(X > 0.4)$, $P(0.3 < X < 0.8)$ et $P(X = 0.8)$.

Exercice n°4 On admet que X est une variable aléatoire qui suit la loi de Cauchy de paramètre $a = 1$. Calculer sa fonction de répartition F et son inverse G. Montrez alors que si U suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, $G(U)$ suit une loi de Cauchy.

Exercice n°5 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $(\theta > 0)$:

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. Représenter graphiquement f pour $\theta = 0.5$, $\theta = 1$ et $\theta = 2$.
2. Supposons maintenant que X suit la loi exponentielle de paramètre θ ayant la densité f. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $V(X)$.
3. Déterminer la loi de : $Y = aX$ et $Z = aX + b$, $U = \ln(X)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
4. Calculer $\mathbf{E}(e^{tX})$, $\mathbf{E}(e^{itX})$ avec $t \in \mathbb{R}$ et i nombre imaginaire. En déduire $\mathbf{E}(e^{-X})$ et $\mathbf{E}(e^{3iX})$.

Exercice n°6 On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$.

1. Déterminer θ pour que $P(X \leqslant 85) = 0.15$
2. En déduire $P(X > 40)$.

Exercice n°7

— Soit X une variable aléatoire normale centrée réduire ($X \sim \mathcal{N}(0,1)$). Calculer :

$$P(X < 0.75),\ P(X \geqslant 0.75),\ P(X \leqslant -0.75),\ P(1.96 \leqslant X \leqslant 1.96),\ P(X > -1.96),\ P(X^2 < 3.84).$$

— Calculer les fractiles d'ordre 0.05, 0.1, 0.5, 0.95, 0.975.

— Proposer, après examen de la table, une valeur de :

$$P(X < 5),\ P(X \leqslant 6),\ P(X < 10),\ P(X < 178.9).$$

— Refaire la question 1 avec X suit une loi normale $\mathcal{N}(0,4)$.

— Soit X suit une loi normale $\mathcal{N}(20,5)$. Calculer :

$$P(X \leqslant 28),\ P(X \geqslant 28),\ P(X \leqslant 12),\ P(X \geqslant 12),\ P(12 \leqslant X \leqslant 28).$$

— Calculer les fractiles d'ordre 0.05, 0.95.

— Soit X une variable aléatoire telle que $\ln(X = 2) \sim \mathcal{N}(1,4)$. déterminer $P(2.1 < X < 3)$.

Exercice n°8 Une entreprise de marchandise a un parc total de 170 camions. On note X la variable aléatoire qui, à chaque voiture choisi au hasard dans le parc, associe la distance (en km) qu'il a parcouru dans une journée. Une étude statistique permet d'admettre que cette variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne 150 et d'écart-type 15.
Déterminer à 10^{-3} près la probabilité qu'un camion parcourt un jour donné une distance comprise entre 100 et 125 km (on utilisera éventuellement une régression linéaire).

Exercice n°9

— Soit X une variable aléatoire normale centrée réduire ($X \sim \mathcal{N}(0,1)$). Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que :

1. $P(X \leqslant a) = 0.99$
2. $P(X \geqslant a) = 0.05$
3. $P(X \leqslant a) = 0.01$
4. $P(X \geqslant a) = 0.75$.
5. $P(|X| < a) = 0.95$.

— Refaire les questions précédentes avec X suit une loi normale $\mathcal{N}(0,5)$.

Exercice n°10 On suppose que la durée de vie mesurée en heures, d'un disque dur informatique est une variable aléatoire X de la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$.
Déterminer μ et σ tels que $P(X > 1200) = 0.95$ et $PX < 1700) = 0.75$.

Exercice n°11 Un constructeur de télévisions propose une garantie de 3 ans au prix de 119 euros pour sa télévision de marque SMART qui vaut 999.99 euros. Sous l'hypothèse qu'une réparation revient en moyenne à 110 euros au constructeur et que la période avant le recours au service après-vente suit la loi normale de moyenne 2 ans et d'écart-type $1,2$ ans, calculer le bénéfice de cette offre de garantie pour le constructeur.