ETUD'+, Centre de formation
Et Cours de soutien
11 place de la Tour
641610, Morlaàs

STID $1^{\text{ère}}$ année - INTRODUCTION AU CALCUL DES PROBABILITÉS

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 4

ETUD'+, Centre de formation
Et Cours de soutien
11 place de la Tour
641610, Morlaàs

Couples de v.a. - lois conditionnelles - lois marginales

Enseignant-Formateur : H. El-Otmany **A.U.** : 2019-2020

Exercice n°1 On lance un dé équilibré non truqué. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $\{1;\,2;\,3;\,4;\,5;\,6\}$ par :

— X prend 0 si le résultat est pair, et 1 sinon.

— Y prend 0 si le résultat est 2 ou 4, et 1 sinon.

Donner le tableau de la loi conjointe du couple $(X,\,Y)$ et des lois marginales.

Exercice n°2 Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement deux boules de cette urne. Soient X et Y deux variables aléatoires définies par :

— X prend la valeur 1 si la première boule tirée est blanche et 0 sinon.

— Y prend la valeur 1 si la seconde boule tirée est blanche, et 0 sinon.

Donner la table de la loi conjointe de $(X,\,Y)$ dans le cas où les tirages se font avec remise, puis dans le cas où les tirages se font sans remise.

Exercice n°3 On considère un couple de variable aléatoire (X, Y) tel que $X(\Omega) = \{-1,\,0\}$ et $Y(\Omega) = \{0,\,1\}$ ayant la loi conjointe présentée dans le tableau ci-dessous :

X \ Y	0	1	loi de X
-1	0.1	0.3	?
0	0.4	0.2	?
Loi de Y	?	?	?

1. Compléter le tableau ci-dessus et déterminer la loi marginale de X et de Y. Ces variables sont-elles indépendantes ?
2. Donner toutes les lois conditionnelles.
3. Déterminer $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{E}(Y)$, $V(X)$ et $V(Y)$.
4. Déterminer $\mathbf{E}(XY)$. En déduire $Cov(X, Y)$. Que peut-on dire de l'indépendance des variables X et Y ?
5. Donner les lois de la variable $Z = X + Y$ et le tableau de la loi de probabilité du couple (X,Z)). Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?
6. Calculer $\mathbf{E}(Z)$ et $V(Z)$ en utilisant les questions 2 et 3 sans utiliser la loi de Z.

Exercice n°4 Sur $\Omega = \{-1;\,0;\,1\}$, on considère un couple (X, Y) de variables aléatoires tel que, pour tout

$$P\left(\{X = i\} \cap \{Y = j\}\right) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si} \quad i = j, \\ \frac{1}{24} & \text{si} \quad i = 0 \,\text{ou}, j = 0 \,\text{et}\, i \neq j \\ \frac{1}{6} & \text{si} \quad i = -j \;\; \texttt{et} \;\; i \neq j \end{cases}$$

1. Représenter ces données dans une table. Déterminer les lois marginales de X et Y.
2. Déterminer l'espérance de X, puis celle de Y.
3. Calculer $\mathbf{E}(XY)$, $Cov(X, Y)$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. On pose $Z = X + Y$ et $U = XY$. Déterminer la loi du couple (Z, U), ainsi que les lois des variables aléatoires Z et U. Les variables Z et U sont-elles indépendantes ?

Exercice n°5 On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) tel que

— X suit la loi de Bernoulli de paramètre 0.6 ($X \sim \mathcal{B}(0.6)$).
— Y prend les valeurs 0, 1 et 2 ($Y(\Omega) = \{0,\ 1\,2\}$).
— Les lois conditionnelles de Y sachant $X = x$ sont présentées dans le tableau ci-dessous :

$P_{Y/X=x}(y)$	0	1	2
0	0.4	0.1	0.5
1	0.2	0.6	0.2

1. Que peut-on dire de l'indépendance des variables X et Y ? Donner la loi conjointe du couple $(X,\ Y)$.
2. Déterminer la loi marginale de Y.
3. Calculer $E(Y)$ de deux manières différentes et $V(Y)$.
4. On pose $Z = X + Y$, déterminer la loi de Z en précisant $E(Z)$ et $V(Z)$.
5. En déduire $Cov(X, Y)$. Calculer r_{XY} et interpréter le résultat.
6. Déterminer $V(2X + 3Y)$.

Exercice n°6 On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) tel que $X(\Omega) = \{0,\ 1\}$ et $Y(\Omega) = \{-2,\ -1\,0\}$. On présente dans le tableau ci-dessous la loi conjointe du couple $(X,\ Y)$.

$P(X = x, Y = y)$	-2	-1	0
0	0.10	0.35	0.10
1	p	0.20	0.15

1. Déterminer la valeur de p.
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y. Que peut-on dire de l'indépendance des variables X et Y ?
3. Déterminer toutes les lois conditionnelles.
4. Calculer $E(Y)$ de deux manières distinctes et $V(Y)$.
5. On pose $Z = X - Y$, déterminer la loi de Z en précisant $E(Z)$ et $V(Z)$.