STID $1^{\text{ère}}$ **année - INTRODUCTION AU CALCUL DES PROBABILITÉS**

ETUD'+, Centre de formation
Et Cours de soutien
11 place de la Tour
641610, Morlaàs

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 5

Vecteurs aléatoires - Indépendances - Vecteurs gaussiens

ETUD'+, Centre de formation
Et Cours de soutien
11 place de la Tour
641610, Morlaàs

Enseignant-Formateur : H. El-Otmany **A.U.** : 2019-2020

Exercice n°1 Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité $f(x, y) = kxy\mathbf{1}_D(x, y)$ avec $k \in \mathbb{R}$ et

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant 1\right\} .$$

1. Calculer k puis la probabilité de l'événement $\{X + Y < t\}$ avec $t \in [0,\, 1]$.
2. Déterminer les densités de X et de Y. Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

Exercice n°2 Soient X et Y deux variables aléatoires Gaussiennes centrées et indépendantes telles que $V(X) = 1$ et $V(Y) = 4$.

1. Déterminer la loi du vecteur aléatoire ci-dessous en précisant son espérance et sa matrice de variance-covariance Σ.
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$
2. On considère le vecteur aléatoire
$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3X + Y + 4 \\ 2X + 2 \end{pmatrix}$$
Donner sa loi en précisant son espérance et sa matrice de variance-covariance.
3. Les variables Z_1 et Z_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice n°3 On considère un vecteur $(X_1, \cdots, X_n)$ de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) suivant la loi normale centrée réduire $\mathcal{N}(0, 1)$. Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$ tels que $a = (a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $b = (b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. On pose $A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i$ et $B = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i X_i$. Montrez que A et B sont indépendantes si et seulement si $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$.

Exercice n°4 On suppose que la vitesse (en km/h) et la distance (en km) parcourue par une voiture forment un vecteur aléatoire Z de loi Gaussienne. En notant X la variable aléatoire associée à la la vitesse et Y celle associée à la distance, on a donc :

$$Z = \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$$

avec $\mu_1 = 110$, $\mu_2 = 80$, $\sigma_1^2 = 9$ et $\sigma_2^2 = \sigma_{12} = 4$.

1. Donner est la loi de X ?
2. Déterminer la probabilité qu'une voiture, choisi au hasard dans cette population, a une vitesse plus de 125 km/h ?

3. Déterminer la probabilité qu'une voiture, choisi au hasard dans cette population, a une vitesse entre 110 km/h et 130 km/h ?
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y ? Quelle est l'intérêt de ce coefficient ? Commenter le résultat obtenu.

Exercice n°5 La proportion de personnes ayant les cheveux marrons foncés dans une population est p.

1. Quelle variable peut-on associer à une personne prise au hasard dans la population. Déterminer sa loi de probabilité.
2. On s'intéresse à un échantillon de n personnes tirées au hasard *avec remise* dans la population.
   - 2.1. Déterminer l'univers associé à cette expérience aléatoire.
   - 2.2. Construire un vecteur aléatoire qui reflète cette expérience.
   - 2.3. Exprimer la proportion de personnes ayant des cheveux marrons foncés dans l'échantillon à partir de la question 2.2.
   - 2.4. Donner la proportion en moyenne des personnes ayant des cheveux marrons foncés dans l'échantillon.
   - 2.5. On suppose maintenant que $n = 20$, $p = 0.2$. Calculer la probabilité d'obtenir une proportion de personnes ayant des cheveux marrons foncés supérieure ou égale à 30%.
3. Que se passe-t-il si l'échantillon est choisi *sans remise*.

Exercice n°6 La répartition selon la religion d'une population de 120 étudiants dans un établissement universitaire est la suivante :

Religions x_i	Effectif n_i
abrahamiques	35
chinoises	20
japonaises	17
traditionnelles africaines	8
Autres	40

On tire par hasard avec remise 15 personnes dans cette population.

1. Donner un vecteur de variables aléatoires dépendantes (c'est-à-dire non indépendantes) qui reflète cette expérience. Donner sa loi de probabilité.
2. Calculer la probabilité d'obtenir 5 étudiants de religions abrahamiques, 3 de religions chinoises, 4 de religions japonaises et 3 de religions traditionnelles africaines.
3. Calculer la probabilité d'obtenir un échantillon avec 5 étudiants de religions abrahamiques.
4. Donner des exemples de vecteurs aléatoires indépendants pouvant être associé à cette expérience aléatoire.

Exercice n°7 On lance un dé équilibré 5 fois. Calculer les probabilités des événements suivants :

1. On obtient deux fois un nombre pair et une fois le nombre 1, un fois le nombre 3, une fois le nombre 5.
2. On obtient trois fois un nombre pair et jamais un nombre premier.
3. On obtient trois fois un nombre premier et une fois le 4.
4. On obtient au moins une fois le nombre 2 et 3 fois un nombre pair.
5. On obtient au moins une fois le nombre 2 et au plus deux fois un nombre pair.