Exercice n°1 *[10 points]* La méthode d'intégration numérique suivante, connue sous le nom de méthode de Simpson $3/8$ est décrite par la formule de quadrature :

$$\int_0^1 g(x)dx \approx \frac{1}{8}g(0) + \frac{3}{8}g\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{8}g\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{8}g(1).$$

1. (2pts)Appliquer directement cette formule pour donner une valeur approchée de

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+3x}.$$

Par application de la formule de quadrature de Simpson $3/8$ avec $g(x) = \frac{1}{1+3x}$, il vient que

$$I_{app} := \int_0^1 \frac{dx}{1+3x}dx \approx \frac{1}{8} \times \frac{1}{1+3\times 0} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{1+3\times\frac{1}{3}} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{1+3\times\frac{2}{3}} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{1+3\times 1}$$
$$\approx \frac{1}{8}\left(1 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{4}\right) \approx \frac{1}{8}\left(\frac{8+6+1}{4}\right) \approx \frac{15}{32} \approx 0.46875.$$

On précise que la valeur exacte de cette intégrale est $\dfrac{\ln 4}{3} \approx 0.4621$.

(1pts)Estimer l'erreur commise avec cette méthode.

On calcule la quantité $|I_{app} - I_{ex}| = |0.46875 - 0.4621| \approx 0.00665$.

2. (3pts)Montrer que cette formule de quadrature est exacte pour les polynômes de $\mathbb{R}^3[X]$.

Posons $p_i(x) = x^i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ les polynômes de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et $J(g) = \frac{1}{8}g(0) + \frac{3}{8}g\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{8}g\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{8}g(1)$. On a

$$I(p_0) = \int_0^1 dx = 1;\ J(p_0) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1+3+3+1}{8} = 1 \Longrightarrow I(p_0) = J(p_0),$$
$$I(p_1) = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2};\ J(p_1) = \frac{1}{8}\times 0 + \frac{3}{8}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{8}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{8}\times 1 = \frac{1}{2} \Longrightarrow I(p_1) = J(p_1),$$
$$I(p_2) = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3};\ J(p_2) = \frac{1}{8}\times 0^2 + \frac{3}{8}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{3}{8}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{8}\times 1^2 = \frac{1}{3} \Longrightarrow I(p_2) = J(p_2),$$
$$I(p_3) = \int_0^1 x^3dx = \frac{1}{4};\ J(p_2) = \frac{1}{8}\times 0^3 + \frac{3}{8}\times\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{3}{8}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{8}\times 1^3 = \frac{1}{4} \Longrightarrow I(p_3) = J(p_3).$$

Par conséquent, la formule de quadrature J est exacte pour les polynômes de $\mathbb{R}^3[X]$.

3. (1pts)Montrer qu'elle ne l'est pas sur $\mathbb{R}^4[X]$.

Pour montrer que la formule de quadrature J n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^4[X]$, il suffit de vérifier que pour $p_4(x) = x^4$:

$$I(p_4) = \int_0^1 x^4dx \neq J(p_4).$$

En effet, on a

$$I(p_4) = \int_0^1 x^4dx = \frac{1}{5},$$
$$J(p_4) = \frac{1}{8}\times 0^4 + \frac{3}{8}\times\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \frac{3}{8}\times\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \frac{1}{8}\times 1^4 = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{27} + \frac{16}{27} + 1\right) = \frac{44}{8\times 27} = \frac{11}{54} \neq \frac{1}{5},$$

d'où $I(p_4) \neq J(p_4)$. On en déduit que la formule de quadrature J n'est exacte sur $\mathbb{R}^4[X]$.

4. (3pts)Adapter cette méthode au cas d'un intervalle $[a,b]$ subdivisé en N intervalles. On adoptera les notations usuelles (pas h, subdivision avec des x_i). Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et une subdivision uniforme $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $[a;b]$ de pas $h = \frac{b-a}{n}$, c'est-à-dire $x_i = a + ih$. En utilisant le changement de variable $x = x_i + (x_{i+1} - x_i)s = x_i + hs$, on peut approcher facilement $\displaystyle\int_{x_i}^{x_i+1} f(x)dx$, i étant fixé, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. On a donc

$$\int_{x_i}^{x_i+1} g(x)dx = h\int_0^1 g(x_i+hs)ds = h\left[\frac{1}{8}g(x_i) + \frac{3}{8}g\left(x_i+\frac{h}{3}\right) + \frac{3}{8}g\left(x_i+\frac{2}{3}h\right) + \frac{1}{8}g\left(x_i+h\right)\right].$$

On obtient la formule composite en utilisant la relation de Chasles pour découper l'intégrale sur chaque intervalle

$$J_{comp}(g) \approx h\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{1}{8}g(x_i) + \frac{3}{8}g\left(x_i+\frac{h}{3}\right) + \frac{3}{8}g\left(x_i+\frac{2}{3}h\right) + \frac{1}{8}g\left(x_i+h\right)\right].$$

Exercice n°2 *[10 points]* Soit l'équation différentielle d'ordre 2 suivante avec une inconnue $y(t)$:

$$y''(t) + ty' + t^2y(t) = 0$$

On considère cette équation associée aux conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. On cherche à résoudre sur l'intervalle $I = [0;10]$.

1. (3pts) Présenter ce problème sous la forme d'un problème de Cauchy $Y'(t) = F(t, Y(t))$). Indiquer quel $Y(t)$ poser, quelle fonction F, en précisant domaines de départ et d'arrivée.

   Posons $Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$. Par dérivation, on obtient

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'(t) \\ -ty' - t^2y(t) \end{bmatrix}.$$

   Par conséquent, l'équation différentielle s'écrit :$F(t, Y(t)) = \begin{bmatrix} y' \\ -ty' - t^2y(t) \end{bmatrix}$ où

$$\begin{aligned} F(t,Y(t)) : [0,10]\times\mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \left(t, Y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) &\longmapsto \begin{bmatrix} y_2 \\ -ty_2 - t^2y_1(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. (3pts) Démonter rigoureusement que cette équation différentielle avec ses conditions initiales à une et une seule solution.

   On vérifie les hypothèse de Cauchy-Lipschitz :
   — F est une fonction continue sur $I = [0;10]$ car ses composantes sont continues.
   — On étudie si F est Lipschitzienne en utilisant la nome 1 : $||F(t,Y) - F(t,Z)||$. On a, avec $t \in [0;10]$,

$$\begin{aligned} ||F(t,Y) - F(t,Z)|| &= \left|\left|\begin{bmatrix} y_2 - z_2 \\ -t(y_2 - z_2) - t^2(y_1 - z_1) \end{bmatrix}\right|\right| \\ &\leqslant |1+t||y_2 - z_2| + |t^2||y_1 - z_1| \leqslant \max_{t\in[0,10]}\left(|1+t|, t^2\right)||Y - Z|| \leqslant 100||Y - Z||. \end{aligned}$$

   Donc F est $100-$Lipschitzienne en Y.

3. (1pts) Exposer la méthode d'Euler explicite pour résoudre ce problème.
Soit $Y(t_n) \approx Y_n$ tel que $t_n = nh$. Le schéma d'Euler explicite s'écrit ainsi $Y_{n+1} = Y_n + hF(t_n, Y_n)$, soit ainsi

$$Y_{n+1} = \begin{cases} y_{n+1} &= y_n + hy'_n, \\ y'_{n+1} &= y'_n - h(t_n y'_n + t_n^2 y_n) = y'_n - h(nhy'_n + n^2h^2 y_n) = y'_n - nh^2\left(y'_n + nhy_n\right). \end{cases} \tag{1}$$

4. (3pts) Calculer $y'\left(\frac{2}{10}\right)$ en utilisant cette méthode avec un pas $h = \frac{1}{10}$.
Soit $Y(t_n) \approx Y_n$ tel que $t_n = nh$. En utilisant le schéma d'Euler explicite (1) avec $h = \frac{1}{10} = 0.1$
— $Y_0 = \begin{cases} y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 1. \end{cases}$ (condition initiale).
— $Y_1 = \begin{cases} y(0.1) &= y(0) + hy'(0) = 0 + 0.10 \times 1 = 0.1, \\ y'(0.1) &= y'(0) - 0 \times h^2\left(y'(0) + 0 \times hy(0)\right) = 1. \end{cases}$
— $Y_2 = \begin{cases} y(0.2) &= y(0.1) + hy'(0.1) = 0.1 + 0.1 \times 1 = 0.2, \\ y'(0.2) &= y'(0.1) - 1 \times h^2\left(y'(0.1) + 1 \times hy(0.1)\right) = 1 - 0.1^2\left(1 + 0.1 \times 0.2\right) = 0.9898 \end{cases}$
On trouve finalement $y'(0.2) = 0.9898$.