Introduction à la mécanique des fluides numérique : schéma de Volumes Finis

H. El-Otmany

ATER & docteur en mathématiques appliquées
Département Techniques de commercialisation
IUT de Tarbes
Email personnel : hamou.elotmany@gmail.com
Email professionnel : hammou.el-otmany@iut-tarbes.fr
Website : www.hamoelotmany.github.io

IPSA, 15 Février 2022

"Composition en caractère Cochin sur un ordinateur Apple MacBook Pro 13 à l'aide des logiciels libres suivants : LaTeX 2$_\varepsilon$ pdfTeX Xfig Grace

version : Cours_ IPSA_ 20220120.tex du 31 mars 2022

Outline d'exposé

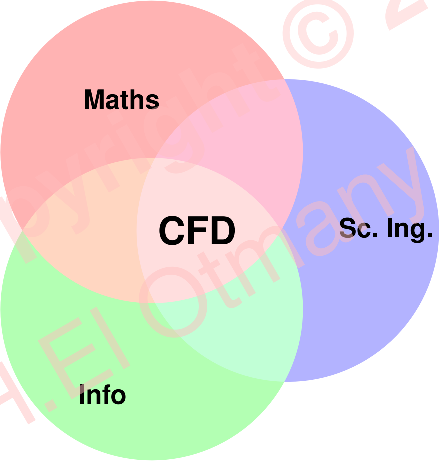
1. **Introduction à la mécanique des fluides numériques**
   - Introduction et motivation
   - Méthode des différence finies
   - Méthodes des éléments finis
   - Méthode de volumes finis
2. **Méthode de volumes finis en $1D$**
   - Étapes de mise en œuvre de la méthode
   - Application au problème unidimensionnel de diffusion
   - Tests numériques
3. **Méthode de volumes finis en $2D$**
   - Application au problème bidimensionnel de diffusion
   - Tests numériques
4. **Prototype du calcul par CFD**

Mécanique des fluides numérique (CFD)

1. Introduction à la CFD
2. Étapes essentielles pour résoudre un problème physique en CFD
3. Méthodes numériques d'approximation

Introduction à la mécanique des fluides numérique ?

- La mécanique des fluides numérique est une discipline carrefour entre les sciences de l'ingénieur, les mathématiques et l'informatique.



Étapes essentiels pour résoudre un problème physique en CFD

1. **la modélisation du phénomène :**
   - décrire le comportement de systèmes physiques pour prédire, optimiser, contrôler le comportement de ces systèmes
   - mise en équation des phénomènes physiques observés
   - décrire les hypothèses, le domaine de validité, la description partielle parfois erronée de la réalité, ... ⇝ erreurs de modélisation
2. **l'analyse mathématique :**
   - étude des équations modélisant le phénomène
   - existence, unicité de solutions
   - analyse de la stabilité et la singularité des solution (stables, instables, singulières, ...) ⇝ erreurs de calcul
3. **la résolution numérique et le développement informatique :** il existe beaucoup de problèmes n'ayant pas de solutions explicites, donc nous se retournons aux ordinateurs pour les résoudre.
   - choix et étude de la méthode de résolution (volumes finis, différences finies, éléments finis,...) ⇝ erreurs numériques
   - écriture des algorithmes de résolution
   - analyse et traitement de la solution

Pourquoi des simulations numériques ?

1. Investigation du comportement de systèmes complexes (absence de solution analytique).
2. Mise en œuvre et test de modèles théoriques pour confrontation aux expériences.
3. Cas inaccessibles aux méthodes expérimentales non intrusives.
4. Accès à des données expérimentales difficilement mesurables.
5. Souplesse phase R&D d'un projet industriel, coût moindre que la réalisation de prototypes.

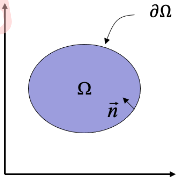
- **Méthodes numériques d'approximation :** différences finies, éléments finis, volumes finis.

- **Idée :** passage d'un problème continu (dimension infinie) à problème discret (dimension finie).

- **Objectif :** permet d'approcher la solution d'une équation différentielle régissant un phénomène donnée

$$\begin{cases} L(u) & = f \text{ dans } \Omega, \text{ (problème différentiel)} \\ \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} & = h \text{ sur } \partial\Omega, \text{ (Conditions aux limites)} \end{cases}$$

où α, β sont des réels ($\alpha \neq 0,\ \beta = 0$: cond. de Dirichlet, $\alpha = 0,\ \beta \neq 0$: cond. de Neumann, $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$: cond. de Robin).



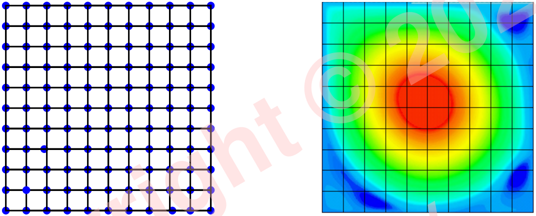
- **Applications :** mécanique des fluides, mécanique des structures, ...

Pourquoi se méfier des méthodes numériques ?

1. Sources d'erreurs inhérentes associées à la méthode utilisée.
2. Seule la physique modélisée est observée.
3. Coût en temps de calcul augmentant très rapidement avec la précision souhaitée (risque de sous-résolution selon le domaine de validité du problème).
4. Artefacts numériques : instabilités, dispersions, diffusion, ...

Méthode des différences finies

- Domaine cible approché par une grille cartésienne.



Source de l'image (PFE-Bac+3-Helotmany)

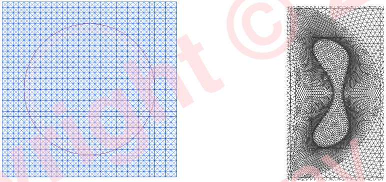
- Dérivées partielles approchées par différence divisées (Dév. Taylor-Lagrange) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x+h)-u(x)}{h}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x-h)-2u(x)+u(x+h)}{2h}$$

- Avantage : très simple à développer et à utiliser.
- Inconvénient : limités à des géométries simples et ne conservent pas les propriétés physiques (flux, ...)

Méthode des éléments finis

- Domaine cible est complexe.
- Utilisation de maillage similaire des volumes finis (cellules jointives non inter-pénétrantes)



Source de l'image (PhD-Helotmany).

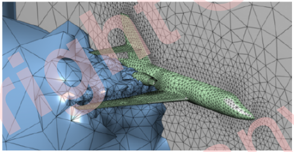
- Interpolation de solution par les fonctions polynomiales par morceaux ou de forme ou modales ϕ_i :

$$u(x) \approx \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i(x), \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

- Avantage : précision arbitrairement élevée.
- Inconvénient : certains problèmes de stabilité.

Méthode des volumes finis

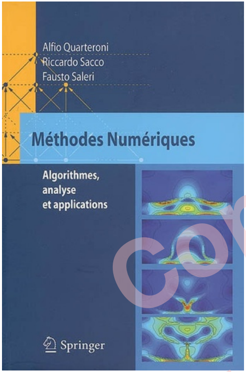
- Domaine de calcul subdivisé en volumes de contrôles (polygones, polyèdres).
- Utilisation de maillage similaire des éléments finis (cellules jointives non inter-pénétrantes)

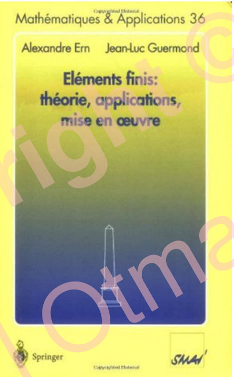


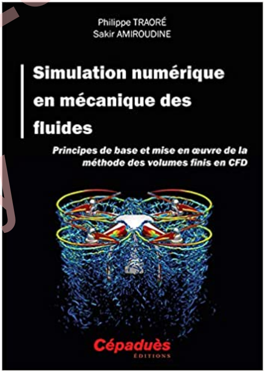
Source de l'image (CSR of California University).

- Calcul d'intégrale de l'EDP sur chaque volume de contrôle par le théorème de divergence.
- Avantages : géométries complexes, approche naturelle en mécanique des fluides, bonne conservation des propriétés physiques (conservation du flux, bornes des solutions, ...).
- Inconvénient : moins évidente à appliquer dans d'autres domaines.

Supports pédagogiques







Dans ce cours, nous n'exposerons que la méthode des volumes finis.

Méthode des volumes finis

1. Étapes de résolution de la méthode des volumes finis.
2. Restriction : EDP linéaires (diffusion et advection) en $1D$ et $2D$.
3. On utilisera des problème simples (de solutions exactes connues) pour analyser le comportement de cette méthode.

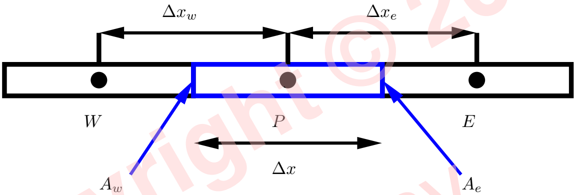
Méthode des volumes finis

Étapes de résolution de la méthode des volumes finis

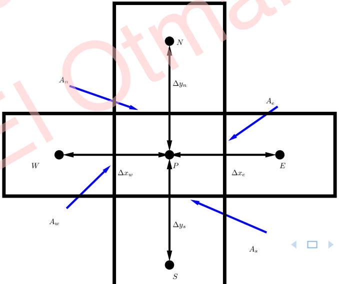
1. Définition de l'équation du phénomène étudié.
2. Discrétisation du domaine de validité du phénomène étudié (subdivision en volumes élémentaires).
3. Intégration de l'équation sur chaque volume du contrôle (théorème de Gauss ou de divergence ou d'Ostrograsdki).
4. Traitement des conditions aux limites.
5. Construction du système d'équation algébrique résultant et sa résolution matricielle.
6. Présentation des résultats (comparaison avec la solution explicite ou à l'expérience).

Exemples de volume de contrôle

- Volume du contrôle en 1D (chaque nœud représente des grandeurs physiques : T, v, p,...)

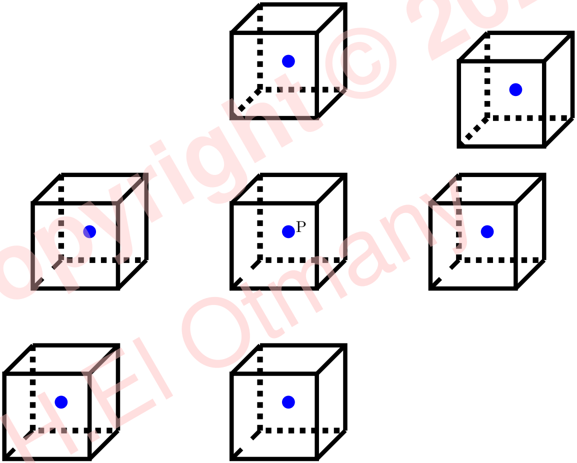


- Volume du contrôle en 2D



Méthode des volumes finis

- Volume du contrôle de 3D



Mise en application de volumes finis en $1D$: phénomène du transfert de chaleur

Étape 1 : définition de l'équation du transfert de chaleur à résoudre

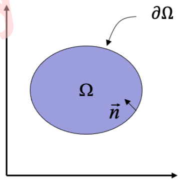
On considère l'**équation de la chaleur** sur un domaine Ω :

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} + \nabla(\rho c_p v T) - \mathrm{div}(\kappa \nabla T) = S_T$$

$$\text{Temporel} \quad + \quad \text{Transport} \quad + \quad \text{Diffusion} \quad = \text{Source de chaleur}$$

avec

- T, la température (K)
- ρ, la masse volumique $(Kg \cdot m^{-3})$
- c_p, la capacité calorifique $(J \cdot Kg^{-1} \cdot K^{-1})$
- t, le temps (s)
- v, la vitesse $(m \cdot s^{-1})$
- κ, la conductivité thermique $(W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1})$
- S_T, la source de chaleur volumique $(W \cdot m^{-3})$



Observation 1 : pour mieux comprendre la méthode des volumes finis, on suppose que

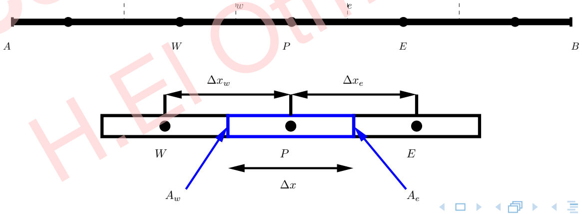
- Ω : une plaque rectangulaire $[0, l] \times [0, L]$.
- $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$: un problème stationnaire.
- $S_T = 0$: le terme source est nul.
- $L >>> l$:

Par conséquent, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0$.

- Conditions de Dirichlet en $x = 0$ et $x = L$ telles que $T(0) = T_A$ et $T(L) = T_B$.

Étape 2 : discrétisation de domaine du phénomène

1. En MAJUSCULE, on notera les grandeurs relatives aux VOLUMES et aux NŒUDS :
   - Nœud du volume considéré ; P.
   - Nœud du voisin de gauche de P ; W (west).
   - Nœud du voisin de droite de P ; E (est).
   - Température en P, E et W ; T_P, T_E et T_W.
   - Taille du volume (distance entre les faces du volume) ; Δx.
2. En minuscule, on notera les grandeurs relatives aux frontières des volumes :
   - Face à droite du volume P (est) ; e.
   - Face à gauche du volume P (west) ; w.
   - Distance séparant les nœuds et ses voisins ; Δx_e, Δx_w.



Étape 3 : Intégration de l'équation sur chaque volume du contrôle

Théorème de la divergence

Supposons que S est une surface fermée délimitant le volume V. Soient $\mathbf{u}$ un champs vectoriel de classe C^1 et $\vec{n}$ un vecteur normal vers l'extérieur de V, alors :

$$\int_V \mathrm{div}(\mathbf{u})dV = \int_S \mathbf{u} \cdot \vec{n} dS.$$

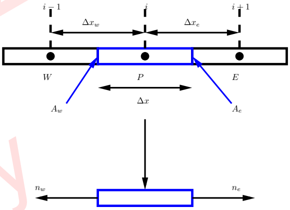
En appliquant le théorème de la divergence, nous avons

$$\int_V \mathrm{div}(\kappa \nabla T)dV = \int_S \kappa \nabla T \cdot \vec{n} dS = 0$$

$$\int_{V_P} \frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x}\right) dV = \int_{S_P} \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Les flux diffusifs sont approchés en discrétisant les expressions des gradients sur les faces avec les températures des nœuds :

$$
\begin{aligned}
\int_{S_P} \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \vec{n} dS &= \left[\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w n_w A_w \right] + \left[\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e n_e A_e \right] \\
&= \left[\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w (-1) A_w \right] + \left[\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e (1) A_e \right] \\
&= \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e A_e - \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w A_w \\
&= \left(\kappa_e \frac{T_E - T_P}{\Delta x_e} A_e \right) - \left(\kappa_w \frac{T_P - T_W}{\Delta x_w} A_w \right)
\end{aligned}
$$



où A_e et A_s désigne les sections transversales (très petites).

Par un simple calcul, on obtient

$$\int_{S_P} \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \vec{n} dS = \kappa_e \frac{A_e}{\Delta x_e} T_E - \left(\kappa_e \frac{A_e}{\Delta x_e} + \kappa_w \frac{A_w}{\Delta x_w} \right) T_P + \kappa_w \frac{A_w}{\Delta x_w} T_W = 0.$$

Posons

$$a_E = \frac{\kappa_e A_e}{\Delta x_e}, \quad a_W = \frac{\kappa_w A_w}{\Delta x_w}, \quad a_P = a_E + a_W,$$
$$\kappa_e = \frac{\kappa_E + \kappa_P}{2}, \quad \kappa_w = \frac{\kappa_W + \kappa_P}{2}.$$

On obtient, pour chaque volume du contrôle de la plaque rectangulaire, une équation de type :

$$a_E T_E - a_P T_P + a_W T_E = 0$$

Étape 4 : Traitement des conditions aux limites

- Nœud 1 :

$$\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial x}A\right)_e-\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial x}A\right)_w=\left(\kappa_e\frac{T_E-T_P}{\Delta x_e}A_e\right)-\left(\kappa_w\frac{T_P-T_A}{\frac{\Delta x_w}{2}}A_w\right)$$

$$\left(\kappa_e\frac{T_E-T_P}{\Delta x_e}A_e\right)-\left(2\kappa_w\frac{T_P-T_A}{\Delta x_w}A_w\right)$$

$$=a_ET_E-a_ET_P-2a_WT_P+2a_WT_A=0.$$

Donc

$$a_ET_E-(a_E+2a_w)T_P=-2a_WT_A.$$

- Nœud 5 :

$$\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial x}A\right)_e - \left(\kappa\frac{\partial T}{\partial x}A\right)_w = \left(\kappa_e\frac{T_B - T_P}{\frac{\Delta x_e}{2}}A_e\right) - \left(\kappa_w\frac{T_P - T_W}{\Delta x_w}A_w\right)$$

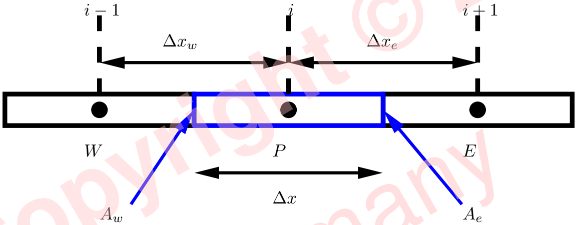
$$\left(2\kappa_e\frac{T_E - T_P}{\Delta x_e}A_e\right) - \left(\kappa_w\frac{T_P - T_W}{\Delta x_w}A_w\right)$$

$$= 2a_E T_B - 2a_E T_P - a_W T_P - a_W T_W = 0.$$

Donc

$$-(2a_E + 2a_w)T_P + a_W T_W = -2a_E T_B.$$

Étape 5 : Construction du système d'équation algébrique résultant et sa résolution matricielle



$$a_W T_W - a_P T_P + a_E T_E = 0,$$

$$a_{i-1} T_{i-1} - a_i T_i + a_{i+1} T_{i+1} = 0, \quad 2 \leq i \leq 4.$$

Étape 5 : Formulation du système d'équation algébrique résultant et sa résolution matricielle

- Nœuds $2, 3$ et 4 :

$$\begin{aligned} a_1T_1 - a_2T_2 + a_3T_3 &= 0, \\ a_2T_2 - a_3T_3 + a_4T_4 &= 0, \\ a_3T_3 - a_4T_4 + a_5T_5 &= 0. \end{aligned}$$

- Nœud 1 : $-a_1T_1 + a_2T_2 = 2a_WT_A$.
- Nœud 5 : $a_4T_4 - a_5T_5 = -2a_ET_B$.

On écrit ainsi :

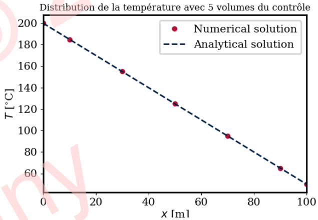
$$\begin{bmatrix} -a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & -a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a_WT_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2a_ET_B \end{bmatrix}.$$

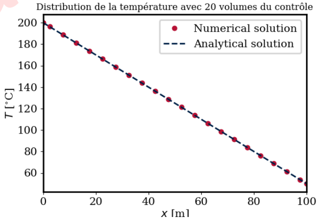
Remarque : la démarche est valable pour n volumes du contrôles.

Étape 6 : Présentation des résultats numériques

1 Cas test : Dirichlet

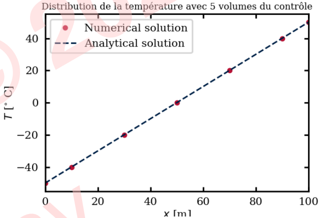
- Développement informatique de la méthode des volumes finis en Python (code disponible sur demande).
- Données :
  - $L = 100$m, $l = 0.0001$m.
  - $T_A = T(0) = 200°C$ et $T_B = T(100) = 50°C$.
  - $S_T = 0$ pour tout $x \in [0; L]$.
  - Conductivité thermique $\kappa = 100W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$.
- Simulations : $n_1 = 5$, $n_2 = 20$

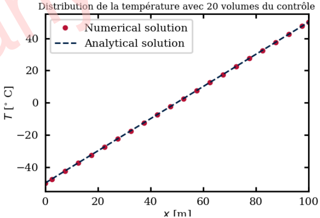




❷ Cas test : Dirichlet + Neumann

- Développement informatique de la méthode des volumes finis en Python (code disponible sur demande).
- Données :
  - $L = 100$m, $l = 0.0001$m.
  - $-\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial n}\right)_{x=0} = 100$ et $T_B = T(100) = 50°C$.
  - $S_T = 0$ pour tout $x \in [0; L]$.
  - Conductivité thermique $\kappa = 100W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$.
- Simulations : $n_1 = 5$, $n_2 = 20$





③ Cas test : S_T n'est pas nulle + conditions de Dirichlet

- Intégration de l'équation sur chaque volume du contrôle (idem+$\bar{S_T}\Delta x$).
- Traitement des conditions aux limites (idem + $\bar{S_T}\Delta x/2$).
- Construction du système d'équation et résolution matricielle
  - Nœuds $2, 3$ et 4 :

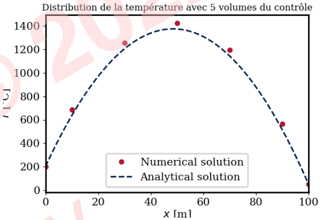
$$a_1T_1 - a_2T_2 + a_3T_3 = \bar{S_T}\Delta x,$$
$$a_2T_2 - a_3T_3 + a_4T_4 = \bar{S_T}\Delta x,$$
$$a_3T_3 - a_4T_4 + a_5T_5 = \bar{S_T}\Delta x.$$

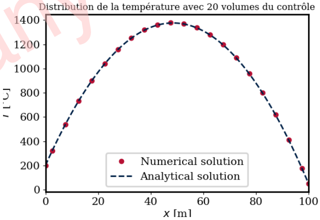
  - Nœud 1 : $-a_1T_1 + a_2T_2 = 2a_WT_A + \bar{S_{T_1}}\Delta x/2$.
  - Nœud 5 : $a_4T_4 - a_5T_5 = -2a_ET_B + \bar{S_{T_5}}\Delta x/2$.

On écrit ainsi :

$$\begin{bmatrix} -a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & -a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a_WT_A + \bar{S_{T_1}}\Delta x/2 \\ \bar{S_{T_2}}T\Delta x \\ \bar{S_{T_3}}\Delta x \\ \bar{S_{T_4}}\Delta x \\ -2a_ET_B + \bar{S_{T_5}}\Delta x/2 \end{bmatrix}.$$

- Données :
  - $L = 100\text{m}$, $l = 0.0001\text{m}$.
  - $T_A(0) = 200°C$ et $T_B = T(100) = 50°C$.
  - $S_T = 100$ pour tout $x \in [0; L]$.
  - Conductivité thermique $\kappa = 100W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$.
- Simulations : $n_1 = 5$, $n_2 = 20$

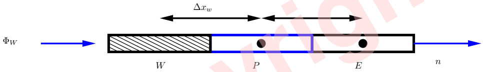




Traitement des cas particuliers de conditions aux limites

- Le flux sur la face west W est le flux sur la face extérieur de la plaque :

$$\kappa_e \frac{T_E - T_P}{\Delta x_e} + \Phi_W + \bar{S}\Delta x/2 = 0$$



Si la condition aux limites de convection + le flux imposé sur la face ouest s'écrit

$$\Phi_W = h_W(T_{ext} - T_P)A_w + \phi_w A_w$$

avec

- h_W, le coefficient d'échange convectif ($W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$).
- T_{ext}, la température du fluide à l'infini (K).
- ϕ_W, le flux imposé sur la face ouest ($W \cdot m^{-2}$).

$\rightsquigarrow a_E T_E - (a_E + h_W)T_P + a_W T_W = \bar{S}_T \Delta x/2 + h_W T_{ext} + \phi_W$.

Mise en application de volumes finis en $2D$: phénomène du transfert de chaleur

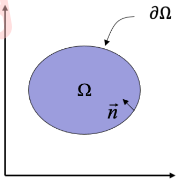
Étape 1 : définition de l'équation du transfert de chaleur à résoudre

On considère l'**équation de la chaleur** sur un domaine Ω :

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t}}_{\text{Temporel}} + \underbrace{\nabla(\rho c_p v T)}_{\text{Transport}} \underbrace{- \operatorname{div}(\kappa \nabla T)}_{\text{Diffusion}} = \underbrace{S_T}_{\text{Source de chaleur}}$$

avec

- T, la température (K)
- ρ, la masse volumique $(Kg \cdot m^{-3})$
- c_p, la capacité calorifique $(J \cdot Kg^{-1} \cdot K^{-1})$
- t, le temps (s)
- v, la vitesse $(m \cdot s^{-1})$
- κ, la conductivité thermique $(W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1})$
- S_T, la source de chaleur volumique $(W \cdot m^{-3})$



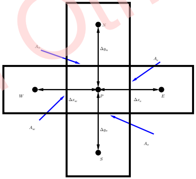
Observation 1 : pour mieux comprendre la méthode des volumes finis, on suppose que

- Ω : une plaque rectangulaire $[0,l] \times [0,L] \times [0;h]$.
- $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$: un problème stationnaire.
- $S_T = 0$: le terme source est nul.
- $k = 1$ (pour simplifier les notations)
- $L >>>> h$, $l >> h$:

Par conséquent, $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$.

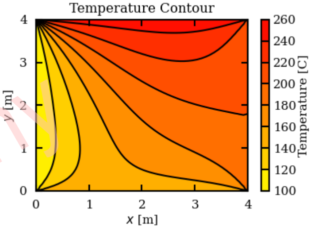
Étape 2 : discrétisation de domaine du phénomène

1. En MAJUSCULE, on notera les grandeurs relatives aux VOLUMES et aux NŒUDS :
   - Nœud du volume considéré ; P.
   - Nœud du voisin de gauche (resp. droite) de P ; W (resp. E).
   - Nœud du voisin de haut (resp. bas) de P ; N (resp. S).
   - Température en P, E et W ; T_P, T_E et T_W.
   - Taille du volume (distance entre les faces du volume) ; Δx.
2. En minuscule, on notera les grandeurs relatives aux frontières des volumes :
   - Face à droite (resp. gauche) du volume P ; e (resp. w)
   - Face en haut (resp. bas) du volume P ; n (resp. s).
   - Distance séparant les nœuds et ses voisins ; Δx_e, Δx_w, Δy_n et Δy_s.



1 Cas test : Dirichlet

- Développement informatique de la méthode des volumes finis en Python (code disponible sur demande).
- Données :
  - $L = 4$m, $l = 4$m. $h = 0.01$
  - $T_N = 250°C$, $T_S = 150°C$, $T_E = 200°C$ et $T_W = 100°C$.
  - $S_T = 1000$ pour tout $(x, y) \in\in [0; l] \times [0; L]$.
  - Conductivité thermique $\kappa = 100 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$.
- Simulations



Prototype du calcul par CFD

- Pré-simulations (Pre-processing)
- Simulations (Processing)
- Post-simulations (Post processing)

Prototype du calcul par CFD

- **Pré-Simulation**
  - Configuration/Maillage (2D/3D)
  - Conditions aux limites et initiales
  - Type et propriétès du fluide
  - Modèle physique
    - Ecoulement permanent/ instationnaire
    - Ecoulement isotherme/ transfert de chaleur
    - Ecoulement Laminaire/turbulent
    - Ecoulement Mono/Di/ Multiphasique
    - Combustion
    - Radiation
    - ....
  - Modèle mathématique
    - Equation de continuité
    - Equation de quantité de mouvement
    - Equation d'énergie
    - Equation d'état

- **Simulation**
  - Intialisation
  - Controle de la solution
    - Critères de convergence
    - Facteurs de relaxation
    - ....
  - Méthodes de discrétisation spatiale et temporelle
  - Schémas d'interpolation
  - Solveur

- **Post-Simulation**
  - Courbes X,Y
  - Contours
  - Vecteurs
  - Animations
  - Rapport

MERCI POUR VOTRE ATTENTION