IPSA 2021-2022, AERO3
Méthode des différences finies
Ma323

TP#1 - Équation de la chaleur

On considère l'équation de la chaleur monodimensionnelle :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, t=0) = \sin(\pi x), \quad x \in [0,1]. \end{cases}$$

On considèrera dans ce TP que $\nu = 0,1$.
On se limitera dans ce TP à t dans l'intervalle $[0,5]$
On discrétise l'intervalle d'espace $[0,1]$ avec un pas d'espace h uniforme, avec $N+2$ nœuds : $h = \dfrac{1}{N+1}$, $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = 1$.
On discrétise l'intervalle de temps avec un pas de temps τ uniforme.
On se propose d'approcher le problème ci-dessus par des schémas aux différences finies explicite, implicite et de Crank-Nicolson.

1. Programmer une fonction `SolEE(N,tau)` qui prend en argument l'entier N qui permet de définir le pas d'espace et τ le pas de temps choisi.

   Cette fonction calculera le schéma d'Euler explicite et rendra :

   (a) X la liste des x_j pour $0 \leq j \leq N+1$;

   (b) T la liste des t_n considérés (avec donc n tels que $0 \leq t_n = n\tau \leq 5$).

   (c) U qui contiendra tous les u_j^n considérés. Chaque ligne correspondra à un u^n. Chaque ligne sera faite de $N+2$ colonnes.

2. Expérimenter la fonction écrite dans les cas suivants de choix de pas :

   (a) $h = 0,05$ et $\tau = 0,1$.

   (b) $h = 0,05$ et $\tau = 0,01$.

   (c) $h = 0,02$ et $\tau = 0,01$.

   (d) $h = 0,01$ et $\tau = 0,005$.

   Pour illustrer les résultats, on pourra par exemple représenter $u(x,t)$ calculé par la méthode numérique en fonction de x pour quelques valeurs de t (on pourra représenter pour $t = 0; 1; 2; 3; 4; 5$).

   Interpréter les résultats.

3. Reprendre les questions précédentes en programmant les schémas d'Euler implicite et de Crank-Nicolson (on notera `SolEI` et `SolCN` les fonctions programmées).

   Que constate-t-on ?

4. Vérifier que la fonction $u(x,t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\pi x)$ avec $\alpha = \nu\pi^2$ est la solution du problème posé.

   Mesurer dans les différents cas étudiés pour les différents schémas l'erreur commise avec la méthode numérique, en mesurant

$$E = \max_{j,n} \left| u_j^n - u(x_j, t_n) \right|$$

   (le max portant sur tous les j, n calculés). Commenter.