1 Dossier-Projet

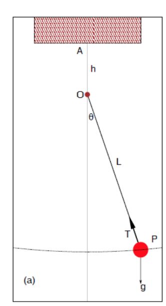
- Project name
  - SRC
    - IntegratUtils.py $\rightsquigarrow$ Méthodes d'intégration
    - odeUtils.py $\rightsquigarrow$ Méthodes numériques pour les EDOs
    - main.py $\rightsquigarrow$ Fichier pour appeler et répondre aux questions du projet
  - Rapport
    - Figures
    - fichier en latex ou word
  - Documenation
    - projetPDF
    - autres documents essentiels pour la rédaction

Le projet individuel à rendre le 10 avril 2022 doit contenir :
— un rapport qui présente l'objectif du projet, la réponse aux questionnaires, les formules appliquées, les figures avec les commentaires, ...
— les fichiers en Python avec des commentaires ...

2 Esquisse de réponses

Question n°1

— La masse m
— attache à un Pivot O
— parmi un fil inextensible et de masse négligeable de longueur L
— Deux forces agissent sur la masse : la gravite $P = mg$, la tension du fil $T = mg\cos(\theta)$.
En appliquant la 2ème loi de Newton $(F = ma)$ $\rightsquigarrow$ le système est décrit en fonction de $\theta(t)$ entre le fil et l'axe vertical et par la vitesse angulaire θ'.



L'étude du mouvement d'un pendule simple sans frottements amène à l'étude de la résolution de l'équation différentielle suivante, (indépendante de la masse m) non linéaire :

$$L\theta''(t) = -g\sin(\theta(t))$$

— L : la longueur du pendule,
— g : l'accélération due à la pesanteur
— θ : l'angle constitué par le pendule et la verticale.

1. Reformuler cette équation différentielle sous la forme d'un problème de Cauchy.
Posons $\Theta(t) = \begin{bmatrix}\theta(t)\\ \theta'(t)\end{bmatrix}$ et $F(t,\Theta(t)) = \begin{bmatrix}\theta' \\ -\frac{g}{L}\sin(\theta(t))\end{bmatrix}$. L'équation différentielle s'écrit ainsi : $\Theta'(t) = F(t,\theta(t))$ où $F\left(t, \Theta(t) = \begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\theta_2 \\ -\frac{g}{L}\sin(\theta_1)\end{bmatrix}$.
$\rightsquigarrow$ faire appeler les méthodes adaptées (Euler explicite, RK2, RK4) pour calculer numériquement la solution $\theta(t)$ et la tracer en considérant
— $g = 9.81m/s^2$; $L = 1m$; $h = 0.04$
— $I = [0; 8]$
— Conditions initiales $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ et $\theta'(0) = 0$.
$\rightsquigarrow$ Commenter les résultats.
$\rightsquigarrow$ Modifier la valeur de h et commenter le résultat (calculer les erreurs entre deux valeurs différentes de h).

Question n°2

1. On pose la condition initiale $\theta(0) = 10^{-5}$ et $\theta(0) = 0$. Pour θ très petit, on peut approcher $\sin(\theta) \approx \theta$ et on retrouve l'équation linéaire :$L\theta''(t) = -g\theta(t)$. L'angle oscille périodiquement dans le temps $\theta(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ avec $\omega^2 = \frac{g}{L}$. La période est
— $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.
— T est indépendant de la amplitude A et de la phase ϕ.
Pour comparer la solution calculé numériquement et la solution explicite obtenue grâce à la résolution de l'équation linéarisée, il faut
— déterminer la valeur A,
— Programmer la solution exacte
— Tracer la solution exacte et celle numérique $\theta[:, 0]$ (première composante de la sortie des méthodes numériques) avec les mêmes paramètres

Commentez les résultats en terme de déphasage ..... 6.

2. On revient à la condition initiale $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ et $\theta'(0) = 0.$. Effectuer la même comparaison. Relever la valeur de la période du mouvement et comparer avec celle calculée avec l'équation linéarisée
$\rightsquigarrow$ revient à réaliser les points suivants :
— Détermination des deux premiers passages par 0 ce qui donne la demi période à partir de la trajectoire de $\theta(t)$ tracées par les points (t_i, θ_i) pour $i = 0, 1, \cdots, n$.
— Détermination du passage par zéro : on détermine le premier point j tel que $\theta_j < 0$ et donc le passage par zéro se fait dans l'intervalle $[j-1; j]$
— Interpolation linéaire sur $[j-1; j]$ pour déterminer le passage par zéro.
Autrement dit : détermination deux intervalles $[j1-1, j1]$ et $[j2-1, j2]$ qui correspondent au passage par zéro de la fonction θ.
$\rightsquigarrow$ Écrire une fonction permettant de déterminer la valeur de la période T (exemple : def periode(T, theta)).

3. On peut démontrer que la période du mouvement du pendule simple avec une condition initiale $\theta(0) = 0 \in [0; \pi[$ et $\theta'(0) = 0$ est donnée par le calcul de l'intégrale suivante :

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}; \quad k = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right).$$

   — Vérifier que pour θ_0 petit, cette formule donne bien la période calculée avec l'équation linéarisée (que l'on notera T_0).
   $\rightsquigarrow$ .....
   — Calculer numériquement cette période lorsque $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ à l'aide de cette formule (et en se servant du code écrit lors du TP portant sur l'intégration numérique).
   $\rightsquigarrow$ Utiliser une méthode numérique selon votre choix (RG, RD, Trapèze, Simpson, ...)
   $\rightsquigarrow$ Comparer avec la valeur précédemment relevée en présentant l'erreur relative ou absolue ....
   — Représenter graphiquement l'évolution de $\frac{T}{T_0}$ en fonction de θ_0. Pour quelle valeur de θ_0 a-t-on $T = 2T_0$? Représenter $\theta(t)$ pour ce cas de figure.
   $\rightsquigarrow$ ....

Question n°3 On veut mesurer l'erreur de calcul dans la résolution numérique de l'équation différentielle avec les différentes méthodes. Établir une représentation graphique de ces erreurs en fonction de N. On pourra s'intéresser aussi à l'erreur quand on travaille sur un autre intervalle de temps $[0, T]$.
$\rightsquigarrow$ un code Python permettant de calculer l'erreur de chaque méthode en utilisant le log-log ou l'erreur absolue selon votre choix. Commenter les résultats.