Ma 323 — Méthode des différences finies (2021-2022)
TD 1 — Autour de l'équation de la chaleur

Dans ce TD, on va étudier d'autres schémas pour la résolution numérique de l'équation de la chaleur prise en exemple dans le cours :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \forall (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in [0,1]. \end{cases}$$

On reprend dans un premier temps la même discrétisation avec $h = \dfrac{1}{N+1}$ et τ le pas de temps. On note u_j^n la valeur approchée de $u(x_j, t_n)$ avec $x_j = jh$ et $t_n = n\tau$. On reprend la même discrétisation des conditions initiale et aux limites.

1 Schéma d'Euler implicite

On considère d'abord le schéma dit d'Euler implicite qui est le suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \nu \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{h^2} = 0$$

1. Montrer que ce schéma est consistant avec l'équation de la chaleur, qu'il est précis d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.
2. On pose comme dans le cours $u^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix}$.

   Montrer que le schéma d'équation se traduit sous la forme matricielle :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ M_i u^{n+1} = u^n$$
3. Expliquer rapidement comment on programmerait l'algorithme dans ce cas.
4. En analysant les valeurs propres de M_i, montrer que l'on a avec la norme 2, l'inégalité

   $$\|u^{n+1}\| \leq \|u^n\|$$
5. En déduire la stabilité du schéma implicite en norme 2.
6. A l'aide du principe du maximum discret, montrer la stabilité du schéma d'Euler implicite en norme ∞.

2 Schéma de Crank-Nicolson

Le principe du schéma de Crank-Nicolson est de faire la moyenne des deux schémas d'Euler explicite et implicite. On arrive au schéma suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \nu \frac{u_{j-1}^{n} - 2u_j^{n} + u_{j+1}^{n}}{2h^2} - \nu \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{2h^2} = 0$$

1. Montrer que ce schéma est consistant, précis d'ordre 2 en temps et d'ordre 2 en espace.
2. Présenter ce schéma sous forme matricielle et décrire sa mise en oeuvre pratique.
3. Étudier la convergence du schéma en norme L^2 en appliquant la condition de stabilité de Von Neumann.

3 Autres conditions aux limites

1. On considère la même équation de la chaleur avec cette fois, comme condition aux limites :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad u(0,t) = 1 \quad \text{et} \quad u(1,t) = -1$$

   Comment adapter la formulation des trois schémas considérés pour en tenir compte ?
2. On considère la condition de Neumann $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0$.
   On fait le choix de la discrétiser par $u_0^n = u_1^n$ et $u_N^n = u_{N+1}^n$. Comment adapter les schémas ?
3. On considère la condition de périodicité $u(0,t) = u(1,t)$. Comment adapter les schémas ? On précisera notamment les formats des vecteurs et matrices considérés.