Exercice n°1 Dans ce TD, on va étudier d'autres schémas pour la résolution numérique de l'équation de la chaleur prise en exemple dans le cours :

$$(EDP)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = 0 \quad \forall(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}_+^\star, \\ u(0,t) = u(1,t) & = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^\star, \\ u(x,0) & = u_0(x) \quad \forall x \in [0,1] \end{cases}$$

On reprend dans un premier temps la même discrétisation avec $h = \frac{1}{N+1}$ et h le pas de temps. On note u_j^n la valeur approchée de $u(x_j, t_n)$ avec $x_j = jh$ et $t_n = n\tau$. On reprend la même discrétisation des conditions initiale et aux limites.

1 Schéma d'Euler implicite

On considère d'abord le schéma dit d'Euler implicite qui est le suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \nu\frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{h^2} = 0.$$

1. Montrer que ce schéma est consistant avec l'équation de la chaleur, qu'il est précis d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace. La consistance donne une idée sur l'approximation de l'équation aux dérivées partielles (EDP) par l'équation aux différences finies (EDF). Un schéma est dit consistant si et seulement si l'erreur de troncature (l'erreur commise lorsque l'on remplace la solution approchée u_i^n par la solution exacte aux nœuds de la discrétisation (ou du maillage) $u(jh, n\tau)$ dans l'équation aux différences) tend vers zéro lorsque tous les pas de discrétisation h et τ tendent vers zéro indépendamment. Autrement dit; plus on raffine le maillage de calcul plus le résultat doit être précis.

   On note $u(x,t)$ la solution exacte de l'EDP et u_j^n la solution numérique de l'EDF :

   $$(EDF) : \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \nu\frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{h^2} = 0, \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant N.$$

   Pour montrer que le schéma d'Euler implicite est consistant, on écrit le développement en série de Taylor pour toutes les quantités en fonction de $u_j^{n+1} :\approx u(x_j, t_{n+1})$ au voisinage du point $(x_j, t_{n+1}) = (jh, (n+1)\tau)$:

   $$u_j^n = u_j^{n+1} - \frac{\tau}{1!}\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_{n+1}) + \frac{\tau^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_{n+1}) + o(\tau^2)$$
   $$u_{j+1}^{n+1} = u_j^{n+1} + \frac{h}{1!}\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_{n+1}) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{n+1}) + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t_{n+1}) + \frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_{n+1}) + o(h^4)$$
   $$u_{j-1}^{n+1} = u_j^{n+1} - \frac{h}{1!}\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_{n+1}) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{n+1}) - \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t_{n+1}) + \frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_{n+1}) + o(h^4)$$

   — **Rappel :** Une fonction $f(h)$ est un "petit o" de h^n (i.e. $f(h) = o(h^n)$) s'il existe une constante $k > 0$ telle que $|f(h)| \leqslant k\, h^n$.

— **Remarque :** vous pouvez utiliser l'écriture suivante :

$$u_j^n = u_j^{n+1} - \frac{\tau}{1!}\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{(j,n+1)} + \frac{\tau^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{(j,n+1)} + o(\tau^2).$$

Par un calcul simple, on a

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_{n+1}) - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_{n+1}) + o(\tau)$$
$$u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} = h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{n+1}) + \frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_{n+1}) + o(h^4)$$

En reportant ces développements dans l'équation aux différence, il vient que

$$\begin{aligned}\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \nu\frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{h^2} &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_{n+1}) - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{n+1}) \\ &\quad - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_{n+1}) - \nu\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_{n+1}) + o(\tau) + o(h^2).\end{aligned}$$

De l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, il vient que

$$E_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \nu\frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{h^2} = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_{n+1}) - \nu\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_{n+1}) + o(\tau) + o(h^2).$$

Pour obtenir la condition permettant d'annuler les premiers termes dans la relation précédente, qui font intervenir les dérivées d'ordre supérieur $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ on dérive la relation l'EDP $\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ par rapport t, et on permute les dérivées en t et x :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nu\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2} = \nu\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t} = \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \nu^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}.$$

On peut donc écrire l'erreur de troncature sous la forme

$$E_j^n = -\nu\left(\frac{\tau}{2} + \nu\frac{h^2}{12}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_{n+1}) + o(\tau) + o(h^2)$$

En utilisant le fait que u solution de l'EDP satisfait certaines conditions de régularités, alors il existe une constante $C := \max\left(\frac{nu}{2}, \frac{\nu^2}{12}\right)\sup_{x,t}|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_{n+1})|$ telle que

$$|E_j^n| \leqslant C(\tau + h^2)$$

Par passage à la limite $\tau \longrightarrow 0$ et $h \longrightarrow 0$, l'erreur de troncature tend vers 0. Le schéma numérique est ainsi consistant à l'EDP et l'erreur de troncature est d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace (l'erreur est en $o(\tau + h^2)$).

2. On pose comme dans le cours $U^n = (u_1^n, u_2^n, \cdots, u_N^n)^T$. Montrer que le schéma d'équation se traduit sous la forme matricielle : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_i u^{n+1} = u^n$. On réutilise le schéma d'Euler implicite :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \nu\frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{h^2} = 0.$$

Soit ainsi

$$u_j^{n+1} - \tau\nu\frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{h^2} = u_j^n.$$

Posons $\alpha = \nu\dfrac{\tau}{h^2}$, on obtient facilement

$$-\alpha u_{j-1}^{n+1} + (1+2\alpha)u_j^{n+1} - \alpha u_{j+1}^{n+1} = u_j^n.$$

Pour écrire la forme matricielle de ce schéma, il faut maintenant prendre en considération les conditions aux limites $u_0^{n+1} = u_{N+1}^{n+1} = 0$. Pour $j = 1$, puisque $u_0^{n+1} = 0$, le problème se simplifie

$$(1+2\alpha)u_1^{n+1} - \alpha u_2^{n+1} = u_1^n.$$

De même, pour $j = N$, on a

$$-\alpha u_{N-1}^{n+1} + (1+2\alpha)u_N^{n+1} = u_N^n.$$

Ainsi, l'équation aux différence finies s'écrit

$$\begin{bmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \vdots \\ 0 & -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+2\alpha & -\alpha \\ 0 & \cdots & \cdots & -\alpha & 1+2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N^n \end{bmatrix}$$

En d'autre termes, le vecteur $U^n = (u_j^n)_{1\leqslant j\leqslant N}$ est solution du système matriciel

$$M(\alpha)U^{n+1} = U^n$$

où $M(\alpha) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ (ou encore $M(\alpha) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$) est une matrice tridiagonale que nous pouvons écrire comme suit :

$$M(\alpha) = I_N + \alpha A$$

où I_N est la matrice identité et A est définie par :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix} := Tridiag(-1, 2, -1).$$

Par conséquent, on a la méthode suivante pour une approximation numérique de la solution de l'EDP :

(a) On choisit les pas de maillage $h > 0$ et τ petits (détermine la subdivision d'espace $(x_j)_{j=0,\cdots,N+1}$ et celle du temps $(t_n)_{n=0,\cdots,m}$)

(b) On détermine une approximation de par les développements de Taylor,

Algorithm 1 Algorithme d'Euler implicite pour l'EDP

(a) Choix des pas de discrétisation τ et h.

(b) Initialisation du vecteur U contenant le vecteur $u(jh)$ discrétisé en espace : on a donc
une boucle sur j de 0 à N :
$U(j) = u(jh)$
fin de la boucle

(c) Construction de la matrice M

(d) Boucle en temps
Pour n de 1 à m Faire
$V(0) = 0, V(m) = 0$
$V = M^{-1}(\alpha) * U$
dessin du graphe $(X(j), U(j))$
Fin pour de la boucle en temps

(c) On en déduit un système matriciel $MU^{n+1} = U^n$ dont la solution $U^n = (u_1^n, u_2^n, \cdots, u_N^n)^T$ approche le vecteur $(u^n(x_1), u^n(x_2), \cdots, u^n(x_N))^T$.

(d) On résout le système $M(\alpha)U^{n+1} = U^n$.

3. Expliquer rapidement comment on programmerait l'algorithme dans ce cas.
4. En analysant les valeurs propres de M, montrer que l'on a avec la norme 2, l'inégalité :

$$||u^{n+1}||_2 \leqslant ||u^n||_2.$$

— Méthode 1 : il suffit de constater que la matrice $M(\alpha)$ peut s'écrire sous la forme

$$M(\alpha) = I + \alpha A$$

où A est la matrice tridiagonale définie par $A = Tridiag(-1, 2, -1)$. Or, les valeurs propres de A sont données par

$$\beta_j = 4\sin^2\left(j\frac{\pi}{2(N+1)}\right), \quad \forall j \in \{1, \cdots, N\}.$$

On en déduit directement les valeurs propres de la matrice $M(\alpha)$:

$$\lambda_j = 1 + 4\alpha\sin^2\left(j\frac{\pi}{2(N+1)}\right), \quad \forall j \in \{1, \cdots, N\}.$$

Comme $M(\alpha)$ est matrice symétrique alors $||M(\alpha)||_2 = \rho(M(\alpha))$ où $\rho(M(\alpha))$ et le rayon spectral de la matrice $M(\alpha)$ défini par

$$\rho(M(\alpha)) = \inf\left\{||M(\alpha)||,\ ||\cdot|| \text{ est une norme matricielle}\right\}.$$

Soit ainsi $||M(\alpha)||_2 = ||I + \alpha A||_2 = \rho(I + \alpha A) = \max\left(|1 + 4\sin^2\left(j\frac{\pi}{2(N+1)}|\right)\right) > 1$. Par conséquent

$$\rho(M^{-1}(\alpha)) < 1.$$

Comme les valeurs propres de $M(\alpha)$ sont strictement positives alors $M(\alpha)$ est définie positive donc elle inversible et on a $u^{n+1} = M^{-1}(\alpha)u^n$. En utilisant la norme 2, on obtient

$$||u^{n+1}||_2 = ||M(\alpha)^{-1}u^n||_2 \leqslant ||M(\alpha)^{-1}||_2||u^n||_2 \leqslant ||u^n||_2.$$

— Méthode 2 : Si $U = (u_j^n)_{1\leqslant j\leqslant N}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ (c'est-à-dire $M(\alpha)U = \lambda U$ où $U \neq 0_{\mathbb{R}^N}$). On écrit ainsi

$$\begin{aligned} &-\alpha u_{j-1}^{n+1} + (1+2\alpha)u_j^{n+1} - \alpha u_{j+1}^{n+1} = \lambda u_j^{n+1}, \quad \forall\, j \in \{1, \cdots, N\} \\ &-\alpha u_{j+1}^{n+1} + (1+2\alpha-\lambda)u_j^{n+1} - \alpha u_{j-1}^{n+1} = 0, \quad \forall\, j \in \{1, \cdots, N\}. \end{aligned}$$

Pour calculer les u_j^{n+1}, on introduit l'équation caractéristique :

$$-\alpha r^2 + (1+2\alpha-\lambda)r - \alpha = 0.$$

— Si l'équation caractéristique a une racine double, comme $\Delta = (1+2\alpha-\lambda)^2 - 4\alpha^2$, alors on a $\lambda = 1$ ou $\lambda = 1+4\alpha$. Montrons maintenant que ces deux cas sont impossibles :
  — si $\lambda = 1$ alors la racine est $r = 1$ et la théorie des suites récurrentes nous dit qu'il existe a et b tels que, pour tout j, on a

$$u_j = a(1)^j + bj(1)^j.$$

  Comme $u_0 = 0$ et $u_{N+1} = 0$ on arrive à $a = 0$ et $b = 0$. Donc $u_j = 0$ pour tout j et donc on n'a pas de vecteurs propres.
  — si $\lambda = 1+4\alpha$ alors la racine est $r = -1$. On applique la même démarche et on en déduit qu'il n'existe pas de vecteurs propres.

— Si l'équation caractéristique a deux racines r_1 et r_2, alors on a pour tout j :

$$u_j = ar_1^j + br_2^j, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

En utilisant $u_0 = 0$, on obtient $a = -b$ et puisque nous cherchons un vecteur propre non nul alors $a \neq 0$. De même, $u_{N+1} = 0$ implique

$$r_1^{N+1} = r_2^{N+1}.$$

En utilisant le lien entre les coefficients et les racines de l'équation du 2ème ordre, on a $r_1 r_2 = 1$. On en déduit

$$r_1^{2(N+1})=1.$$

Par conséquent, il existe un k tel que $r_1 = e^{\frac{2ik\pi}{2(N+1)}}$. En utilisant le lien entre les coefficients et les racines de l'équation du 2ème ordre :

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= \frac{1+2\alpha-\lambda}{\alpha} = 2\cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right), \\ u_j &= a(r_1^j - r_2^j) = 2a\sin\left(\frac{jk\pi}{N+1}\right). \end{aligned}$$

En variant k, on obtient les valeurs propres λ_k et les vecteurs propres $U_k = (u_j^k)_j$ associés de la matrice $M(\alpha)$:

$$\begin{aligned} \lambda_k &= 1 + 4\alpha\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right), \\ u_j^k &= \sin\left(\frac{jk\pi}{N+1}\right). \end{aligned}$$

Ensuite, on applique la même démarche de la première méthode pour prouver $||u^{n+1}||_2 \leqslant ||u^n||_2$.

5. En déduire la stabilité du schéma implicite en norme 2.
Un schéma numérique est dit stable s'il admet une solution et s'il existe une constante $C > 0$ indépendante de τ et de h telle que

$$||u^n||_2 \leqslant C||u^0||_2, \quad \forall n \geqslant 0.$$

quelle que soit la donnée initiale u^0. Si cette inégalité a lieu sous une condition entre de τ et de h, on dit que le schéma est conditionnellement stable. D'après la question 4, on a

$$||u^{n+1}||_2 \leqslant ||u^n||_2.$$

Par récurrence, on obtient

$$||u^{n+1}||_2 \leqslant ||u^n||_2 \leqslant ||u^{n-1}||_2 \leqslant \cdots \leqslant ||u^0||_2$$

Par conséquent, le schéma numérique est stable.

6. A l'aide du principe du maximum discret, montrer la stabilité du schéma d'Euler implicite en norme ∞. Pour $\alpha = \nu \dfrac{\tau}{h^2}$, on a

$$u_j^n = -\alpha u_{j-1}^{n+1} + (1+2\alpha)u_j^{n+1} - \alpha u_{j+1}^{n+1}.$$

Soit $j_0 \in \{1, \cdots, N+1\}$ tel que

$$u_{j_0}^{n+1} = \max_{1 \leqslant j \leqslant N} u_j^{n+1}.$$

Alors, puisque $u_{j_0}^{n+1} \geqslant u_j^{n+1}$, on obtient

$$u_{j_0}^n = -\alpha u_{j_0-1}^{n+1} + (1+2\alpha)u_{j_0}^{n+1} - \alpha u_{j_0+1}^{n+1} \geqslant -\alpha u_{j_0}^{n+1} + (1+2\alpha)u_{j_0}^{n+1} - \alpha u_{j_0}^{n+1},$$

d'où $\max_{1 \leqslant j \leqslant N} u_j^n = u_{j_0}^n \geqslant u_{j_0}^{n+1} = \max_{1 \leqslant j \leqslant N} u_j^{n+1}$. On en déduit

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant N} u_j^0 \geqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant N} u_j^n, \quad \forall n \in \{1, \cdots, m\}.$$

Par conséquent, on arrive au principe du maximum discret et ainsi le schéma implicite centré est inconditionnellement stable en norme ∞.

2 Schéma de Crank-Nicolson

Le principe du schéma de Crank-Nicolson est de faire la moyenne des deux schémas d'Euler explicite et implicite. On arrive au schéma suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \nu \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{2h^2} - \nu \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{2h^2} = 0.$$

1. Montrer que ce schéma est consistant, précis d'ordre 2 en temps et d'ordre 2 en espace. On écrit le développement en série de Taylor au point (x_j, t_n) à l'ordre 3 en temps :

$$u_j^{n+1} = u\left(x_j, t_n\right) + \tau \frac{\partial u}{\partial t}\left(x_j, t_n\right) + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(x_j, t_n\right) + \frac{\tau^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\left(x_j, t_n\right) + o(\tau^3).$$

Ensuite, on utilise le fait que u est solution de l'EDP, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \frac{\partial u}{\partial t}\left(x_j, t_n\right) + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(x_j, t_n\right) + \frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\left(x_j, t_n\right) + o(\tau^2)\\ &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x_j, t_n\right) + \nu^2 \frac{\tau}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\left(x_j, t_n\right) + \nu^3 \frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\left(x_j, t_n\right) + o(\tau^2).\end{aligned}$$

De même, on a les développements en série de Taylor :

$$\begin{aligned}u_{j-1}^n = u\left(x_j, t_n\right) &- h\frac{\partial u}{\partial x}\left(x_j, t_n\right) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x_j, t_n\right) - \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\left(x_j, t_n\right) + \frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\left(x_j, t_n\right)\\ &- \frac{h^5}{5!}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\left(x_j, t_n\right) + \frac{h^6}{6!}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\left(x_j, t_n\right) + o(h^6)\\ u_{j+1}^n = u\left(x_j, t_n\right) &+ h\frac{\partial u}{\partial x}\left(x_j, t_n\right) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x_j, t_n\right) + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\left(x_j, t_n\right) + \frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\left(x_j, t_n\right)\\ &+ \frac{h^5}{5!}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\left(x_j, t_n\right) + \frac{h^6}{6!}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\left(x_j, t_n\right) + o(h^6)\end{aligned}$$

et

$$\frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_j^n}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x_j, t_n\right) + 2\frac{h^2}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\left(x_j, t_n\right) 2\frac{h^2}{6!}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\left(x_j, t_n\right) + o(h^4).$$

En remplaçant n par $n+1$ dans l'égalité précédente, on obtient suite à un développement en série de Taylor au point (x_j, t_n) que

$$\begin{aligned}\frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_j^{n+1}}{h^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x_j, t_n\right) + 2\frac{h^2}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\left(x_j, t_n\right) + 2\frac{h^2}{6!}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\left(x_j, t_n\right) + \tau\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(x_j, t_n)\\ &+ \tau\frac{h^2}{12}\frac{\partial^5 u}{\partial t \partial x^4}(x_j, t_n) + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial^2 t \partial x^2}\left(x_j, t_n\right)) + o(h^4 + \tau^2).\end{aligned}$$

En utilisant $\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = 0$, on arrive à

$$\begin{aligned}\frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_j^{n+1}}{h^2} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + \left(\frac{h^2}{12} + \nu\tau\right)\right]\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_n) +\\ \left(2\frac{h^4}{6!} + \nu\frac{\tau h^2}{12} + \nu^2\frac{\tau^2}{2}\right)\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j, t_n) + o(h^4 + \tau^2).\end{aligned}$$

Par combinaison linéaire des développements calculés précédemment, il vient que

$$\begin{aligned}CN &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \nu\frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_j^{n+1}}{2h^2} - \nu\frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_j^n}{2h^2}\\ &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\nu\frac{\tau}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{12} + \nu\tau\right) - \frac{h^2}{2\times 12}\right)\nu\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_n)\\ &+ \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right)\tau^2\nu^3\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j, t_n) + o(h^4 + \tau^2).\end{aligned}$$

Après simplification, on obtient

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}-\nu\frac{u_{j-1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_j^{n+1}}{2h^2}-\nu\frac{u_{j-1}^{n}-2u_j^{n}+u_j^{n}}{2h^2}=-\frac{\nu h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\frac{\tau^2\nu^3}{12}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+o(h^4+\tau^2).$$

En utilisant le fait que u solution de l'EDP satisfait certaines conditions de régularités, alors il existe une constante $C:=\max\left(\frac{\nu}{12}\sup_{x,t}|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}|,\frac{\nu^2}{12}\sup_{x,t}|\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}|\right)$ telle que

$$|E_j^n|\leqslant C(\tau^2+h^2)$$

Par passage à la limite $\tau\longrightarrow 0$ et $h\longrightarrow 0$, l'erreur de troncature tend vers 0 et on retrouve l'ordre 2 en temps et d'ordre 2 en espace du schéma numérique.

2. Présenter ce schéma sous forme matricielle et décrire sa mise en œuvre pratique. Pour $\alpha=\nu\frac{\tau}{h^2}$, le schéma numérique de Crank-Nicolson s'écrit ainsi

$$-\frac{\alpha}{2}u_{j-1}^{n+1}+\left(1+2\frac{\alpha}{2}\right)u_j^{n+1}-\frac{\alpha}{2}u_j^{n+1}-\frac{\alpha}{2}u_{j-1}^{n}-\left(1-2\frac{\alpha}{2}\right)u_j^{n}-\frac{\alpha}{2}u_{j+1}^{n}=0$$

d'où

$$-\frac{\alpha}{2}u_{j-1}^{n+1}+\left(1+2\frac{\alpha}{2}\right)u_j^{n+1}-\frac{\alpha}{2}u_j^{n+1}=\frac{\alpha}{2}u_{j-1}^{n}+\left(1-2\frac{\alpha}{2}\right)u_j^{n}+\frac{\alpha}{2}u_{j+1}^{n}$$

Soit ainsi

$$-\frac{\alpha}{2}u_{j-1}^{n+1}+\left(1+2\frac{\alpha}{2}\right)u_j^{n+1}-\frac{\alpha}{2}u_j^{n+1}=-\frac{-\alpha}{2}u_{j-1}^{n}+\left(1+2\frac{-\alpha}{2}\right)u_j^{n}-\frac{-\alpha}{2}u_{j+1}^{n}$$

Ce qui nous mène à l'écriture matricielle suivante :

$$M\left(\frac{\alpha}{2}\right)U^{n+1}=M\left(-\frac{\alpha}{2}\right)U^n.$$

Algorithm 2 Algorithme du schéma Crank-Nicolson

(a) Choix des pas de discrétisation τ et h.

(b) Initialisation du vecteur U contenant le vecteur $u(jh)$ discrétisé en espace : on a donc
    une boucle sur j de 0 à N :
        $U(j)=u(jh)$
    fin de la boucle

(c) Construction de la matrice M

(d) Boucle en temps
    Pour n de 1 à m Faire
        $V(0)=0, V(m)=0$
        $V=M^{-1}(\frac{\alpha}{2})M(-\frac{\alpha}{2})*U$
        dessin du graphe $(X(j),U(j))$
    Fin pour de la boucle en temps

---

3. Étudier la convergence du schéma en norme L^2 en appliquant la condition de stabilité de Von Neumann.

— Méthode 1 : On utilise la transformée de Fourier définie par :

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

qui permet de retrouver facilement le résultat de stabilité du schéma numérique en calculant l'énergie du système à chaque pas de temps.

On multiplie le schéma numérique par $e^{-i\xi x}$ et on intègre sur $\mathbb{R}$ pour obtenir la transformée de Fourier en espace uniquement :

$$\int_0^1 \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} e^{-i\xi x} dx - \int_0^1 \nu \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{2h^2} e^{-i\xi x} dx - \int_0^1 \nu \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{2h^2} e^{-i\xi x} dx = 0.$$

En notant $u_{j+1}^n = u(x_j + h)$ (où u est une fonction périodique de période 1), les coefficients de u_{j+1}^n :

$$\hat{u}_{j+1}^n(\xi) = \int_0^1 u(x_j + h) e^{-i\xi x_j} dx = \int_h^{1+h} u(y) e^{-i\xi(y-h)} dy = e^{i\xi h} \int_0^1 u(y) e^{-i\xi y} dy = e^{i\xi h} \hat{u}_j^{n+1}.$$

De même, on a $\hat{u}_{j-1}^n(\xi) = e^{-i\xi h} \hat{u}_j^{n+1}$. La relation (**??**) se traduit donc par

$$\hat{u}_j^{n+1}(\xi) - \hat{u}_j^n(\xi) = \nu \frac{e^{-i\xi h}\hat{u}_j^n - 2\hat{u}_j^n + e^{i\xi h}\hat{u}_j^n}{2h^2} - \nu \frac{e^{-i\xi h}\hat{u}_j^{n+1} - 2\hat{u}_j^{n+1} + e^{i\xi h}\hat{u}_j^{n+1}}{2h^2} = 0.$$

Posons $\alpha = \nu \frac{\tau}{2h^2}$, on a donc

$$\left(1 + 2\alpha - \alpha(e^{i\xi h} + e^{-i\xi h})\right) \hat{u}_j^{n+1} + \left(2\alpha - 1 - \alpha(e^{i\xi h} + e^{-i\xi h})\right) \hat{u}_j^n = 0,$$

$$u_j^{n+1} = \frac{1 - 2\alpha + \alpha(e^{i\xi h} + e^{-i\xi h})}{1 + 2\alpha - \alpha(e^{i\xi h} + e^{-i\xi h}} \hat{u}_j^n := g(\alpha, \xi h) \hat{u}_n^j$$

Rappel : On rappelle qu'un schéma numérique est stable au sens de Von Neumann si et seulement si pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, le coefficient d'amplification $g(\cdot, \cdot)$ vérifie $|g(\alpha, \xi h)| \leqslant 1$.

On rappelle aussi l'égalité Parseval sur $[0, 1]$ qui donne la conservation de l'énergie par transformée de Fourier :

$$||u^n||^2_{L^2([0,1])} = \int_0^1 |u^n(x)|^2 dx = \int_0^1 |\hat{u}^n(x)|^2 dx.$$

Comme l'énergie d'un système libre (pas de source de chaleur) ne pouvant pas croître, donc l'énergie ne peut que baisser avec le temps, on a ainsi

$$\int_0^1 |u^{n+1}(x)|^2 dx \leqslant \int_0^1 |u^n(x)|^2 dx,$$

ou de manière équivalente :

$$\int_0^1 |\hat{u}^{n+1}(x)|^2 dx \leqslant \int_0^1 |\hat{u}^n(x)|^2 dx.$$

Ceci est vérifié si le coefficient d'amplification du schéma numérique $|g(\alpha, \xi h)| = \left|\dfrac{1-2\alpha+\alpha(e^{i\xi h}+e^{-i\xi})}{1+2\alpha-\alpha(e^{i\xi h}+e^{-i\xi h})}\right| \leqslant 1$. Par combinaison de $\cos(\xi h) = \dfrac{e^{i\xi h}+e^{-i\xi}}{2}$ et $\sin^2\left(\frac{xih}{2}\right) = 1-\cos(\xi h)$, il vient que

$$\begin{aligned}|g(\alpha, \xi h)| &= \left|\frac{1-2\alpha+2\alpha\cos(\xi h)}{1+2\alpha-2\alpha\cos(\xi h)} = \frac{1-2\alpha(1-\cos(\xi h))}{1+2\alpha(1-\cos(\xi h))}\right| \\ &= \left|\frac{1-4\alpha\sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right)}{1+4\alpha\sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right)}\right| = \left|\frac{2}{1+4\alpha\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)}-1\right| \leqslant 1\end{aligned}$$

Prenons par exemple $\xi h = \pi$, alors $\sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right) = 1$ et $g(\alpha, \xi h) = \frac{2}{1+4\alpha} - 1$.
$|g(\alpha, \xi)| \leqslant 1$ s'écrit donc

$$-1 \leqslant \frac{2}{1+4\alpha} - 1 \leqslant 1 \Longleftrightarrow 0 \leqslant \frac{2}{1+4\alpha} \leqslant 2 \Longleftrightarrow 1 \leqslant 1+4\alpha \Longleftrightarrow \alpha = \nu\frac{\tau}{2h^2} \geqslant 0.$$

Par conséquent, le schéma de Crank-Nicolson pour l'équation de la chaleur est inconditionnellement stable car il n'y a pas de condition de stabilité sur le pas de temps τ. Mais τ doit être en accord avec le phénomène étudié.

— Méthode 2 : L'idée est d'introduire une onde de vecteur K à l'instant n

$$u_j^n = \hat{u}(K)e^{iK\,jh}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

alors compte tenu des propriétés algébriques classiques de la fonction exponentielle, on a

$$u_{j+1}^n = e^{iK\,h}u_j^n, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Rappel : Pour toute fonction $u^n \in L^2(\mathbb{R})$ ($L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert et $\{eikx, \quad k \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$, on a

$$u^n(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{u}^n(k)e^{ikx}, \quad \hat{u}^n(k) = \int_{\mathbb{R}} u^n(x)e^{-ikx}dx$$

et la formule de Plancherel de conservation d'énergie

$$||u^n||^2_{L^2([0,1])} = \int_0^1 |u^n(x)|^2dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{u}^n(k)|^2 = \int_0^1 |\hat{u}^n(x)|^2dx$$

(a) On introduit le nombre d'onde ξ selon la relation $\xi = K\,h$, alors

$$u_{j+1}^n = e^{i\xi}u_j^n, \quad u_{j-1}^n = e^{-i\xi}u_j^n,$$

(b) On reporte ces valeurs dans le schéma numérique et on a le calcul qui suit :

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau} - \nu\frac{e^{-i\xi}u_j^n - 2u_j^n + e^{i\xi}u_j^n}{2h^2} - \nu\frac{e^{-i\xi}u_j^{n+1} - 2u_j^{n+1} + e^{i\xi}u_j^{n+1}}{2h^2} = 0.$$

Posons $\alpha = \nu\frac{\tau}{2h^2}$, on obtient

$$\left(1+2\alpha-\alpha(e^{i\xi}+e^{-i\xi})\right)u_j^{n+1} + \left(2\alpha-1-\alpha(e^{i\xi}+e^{-i\xi})\right)u_j^n = 0.$$

Soit ainsi,

$$u_j^{n+1} = \frac{1-2\alpha+\alpha(e^{i\xi}+e^{-i\xi})}{1+2\alpha-\alpha(e^{i\xi}+e^{-i\xi})}u_j^n.$$

(c) On introduit maintenant le coefficient d'amplification du schéma $g(\alpha, \xi)$:

$$g(\alpha, \xi) = \frac{1 - 2\alpha + \alpha(e^{i\xi} + e^{-i\xi})}{1 + 2\alpha - \alpha(e^{i\xi} + e^{-i\xi})}.$$

Le calcul précédent établit donc que

$$u_j^{n+1} = g(\alpha, \xi) u_j^n$$

pour une onde de nombre d'onde ξ.

(d) Il suffit maintenant d'écrire cette définition pour $g(\alpha, \xi)$ proposé au schéma numérique. On a d'abord le calcul élémentaire, en utilisant $e^{i\xi} + e^{-i\xi} = 2\cos(\xi)$,

$$g(\alpha, \xi) = \frac{1 - 2\alpha + 2\alpha\cos(\xi)}{1 + 2\alpha - 2\alpha\cos(\xi)} = \frac{1 - 2\alpha(1 - \cos(\xi))}{1 + 2\alpha(1 - \cos(\xi))} = \frac{1 - 4\alpha\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)}{1 + 4\alpha\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)} = \frac{2}{1 + 4\alpha\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)} - 1$$

On écrit la définition ($\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad |g(\alpha, \xi)| \leqslant 1$) pour la valeur particulière $\xi = \pi$. Alors $\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right) = 1$ et $g(\alpha, \xi) = \frac{2}{1+4\alpha} - 1$.
$|g(\alpha, \xi)| \leqslant 1$ s'écrit donc

$$-1 \leqslant \frac{2}{1 + 4\alpha} - 1 \leqslant 1 \Longleftrightarrow 0 \leqslant \frac{2}{1 + 4\alpha} \leqslant 2 \Longleftrightarrow 1 \leqslant 1 + 4\alpha \Longleftrightarrow \alpha \geqslant 0.$$

Soit ainsi $\alpha = \nu\frac{\tau}{2h^2} \geqslant 0$. Réciproquement, si α vérifie $\alpha = \nu\frac{\tau}{2h^2} \geqslant 0$, on a avec $\xi \in \mathbb{R}$ arbitraire la série d'inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
1 + 4\alpha\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right) &\geqslant 1 \\
0 \leqslant \frac{2}{1 + 4\alpha\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)} &\leqslant 2 \\
-1 \leqslant \frac{2}{1 + 4\alpha\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)} - 1 &\leqslant 1 \\
-1 \leqslant g(\alpha, \xi) &\leqslant 1
\end{aligned}$$

d'où la relation $\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad |g(\alpha, \xi)| \leqslant 1$.

En utilisant la formule de Plancherel, on obtient

$$||u^n||^2_{L^2([0,1])} = \int_0^1 |u^n(x)|^2 dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{u}^n(k)|^2 \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{u}^0(k)|^2 = \int_0^1 |u^0(x)|^2 dx = ||u^0||^2_{L^2([0,1])}.$$

Conclusion : le schéma est stable en norme L^2 et il est consistant, alors il est convergent en norme L^2.

3 Autres conditions aux limites

1. On considère la même équation de la chaleur avec cette fois, comme condition aux limites :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad u(0,t) = 1, \quad u(1,t) = -1.$$

Comment adapter la formulation des trois schémas considérés pour en tenir compte ? il suffit de remarquer que la fonction $v(t,x)$ définie par $v(t,x) = u_0 + (u_1 - u_0)x$ vérifie l'EDP de la chaleur ainsi que les conditions aux limites de Dirichlet non homogènes en 0 et en 1. Soit ainsi w la solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$(EDP1)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = 0 \quad \forall (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}_+^\star, \\ u(0,t) = u(1,t) & = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^\star, \\ u(x,0) & = u_0(x) - v(0,x) \quad \forall x \in [0,1] \end{cases}$$

Ce problème admet une solution puisque c'est un problème de Dirichlet homogène. Posons maintenant $u(t,x) = w(t,x) + v(t,x)$.

— Schéma d'Euler Implicite : la discrétisation de l'équation de la chaleur par le schéma d'Euler implicite prend ainsi la forme suivante :

$$\begin{aligned} u_j^0 &= u_0(jh), \forall j = 1, \cdots, N \\ u_0^n &= 1 = g^{n+1}. \\ -\alpha u_{j-1}^{n+1} + (1+2\alpha) u_j^{n+1} - \alpha u_{j+1}^{n+1} &= u_j^n, \forall j = 1, \cdots, N \\ u_{N+1}^{n+1} &= -1 = d^{n+1}. \end{aligned}$$

Ces conditions n'apparaissent que dans le second membre du système matriciel. En effet, on a

a) Par combinaison de $j = 1$ et $g^{n+1} = u_0^{n+1} = -1$, on a

$$\begin{aligned} -\alpha u_0^{n+1} + (1+2\alpha) u_1^{n+1} - \alpha u_2^{n+1} &= u_1^n \\ 1 + 2\alpha) u_1^{n+1} - \alpha u_2^{n+1} &= u_1^n + \alpha u_0^{n+1} = u_1^n + \alpha g^{n+1}. \end{aligned}$$

b) Par combinaison de $j = N$ et $d^{n+1} = u_{N+1}^{n+1} = -1$, on obtient

$$\begin{aligned} -\alpha u_{N-1}^{n+1} + (1+2\alpha) u_N^{n+1} - \alpha u_{N+1}^{n+1} &= u_1^N \\ -\alpha u_{N-1}^{n+1} + (1+2\alpha) u_N^{n+1} &= u_1^N + \alpha u_{N+1}^{n+1} = u_1^N + \alpha d^{n+1}. \end{aligned}$$

Posons $V^{n+1} = (g^{n+1}, 0 \cdots, d^{n+1})$ (ici $g^{n+1} = 1$ et $d^{n+1} = -1$), alors le schéma numérique d'Euler implicite s'écrit :

$$M(\alpha) U^{n+1} = U^n + \alpha V^{n+1}.$$

— Schéma d'Euler explicite : en utilisant la même démarche du schéma implicite, l'écriture matricielle est

$$U^{n+1} = M(-\alpha) U^n + \alpha V^n.$$

— Schéma de Crank Nicolson : en utilisant la même démarche du schéma Crank-Nicolson, l'écriture matricielle est

$$M\left(\frac{\alpha}{2}\right) U^{n+1} = M\left(-\frac{\alpha}{2}\right) U^n + \frac{\alpha}{2}\left(V^{n+1} + V^n\right).$$

2. On considère la condition de Neumann $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0$. On fait le choix de la discrétiser par $u_0^n = u_1^n$ et $u_N^n = u_{N+1}^n$. Comment adapter les schémas ?

   — Schéma d'Euler implicite : en utilisant $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) \approx \frac{u_1^{n+1} - u_0^{n+1}}{h} = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial x}(1,t) \approx \frac{u_{N+1}^{n+1} - u_N^{n+1}}{h} = 0$, on a

$$\begin{aligned} u_j^0 &= u_0(jh), \forall j = 1, \cdots, N \\ u_1^{n+1} - u_0^{n+1} &= 0 \\ -\alpha u_{j-1}^{n+1} + (1+2\alpha)u_j^{n+1} - \alpha u_{j+1}^{n+1} &= u_j^n, \forall j = 1, \cdots, N \\ u_{N+1}^{n+1} - u_N^{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

   a) Par combinaison de $j = 1$ et $u_0^{n+1} = u_1^{n+1}$, il vient que

$$\begin{aligned} &-\alpha u_0^{n+1} + (1+2\alpha)u_1^{n+1} - \alpha u_2^{n+1} = u_1^n \\ &(1+\alpha)u_1^{n+1} - \alpha u_2^{n+1} = u_1^n. \end{aligned}$$

   b) De même, par combinaison de $j = N$ et $u_N^{n+1} = u_{N+1}^{n+1}$, il vient que

$$\begin{aligned} &-\alpha u_{N-1}^{n+1} + (1+2\alpha)u_N^{n+1} - \alpha u_{N+1}^{n+1} = u_N^n \\ &-\alpha u_{N-1}^{n+1} + (1+\alpha)u_N^{n+1} = u_N^n. \end{aligned}$$

   et on a $-\alpha u_{j-1}^{n+1} + (1+2\alpha)u_j^{n+1} - \alpha u_{j+1}^{n+1} = u_j^n$ pour tout $j = 2, \cdots, N-1$.
   Le schéma numérique s'écrit ainsi : $M'(\alpha)U^{n+1} = U^n$ où

$$M'(\alpha) = \begin{bmatrix} 1+\alpha & -\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \vdots \\ 0 & -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+2\alpha & -\alpha \\ 0 & \cdots & \cdots & -\alpha & 1+\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N^n \end{bmatrix}$$

   En pratique, cette approche ne donne pas une bonne précision et plus particulièrement au bord du domaine, car elle utilise une approximation de $\frac{\partial u}{\partial x}$ qui est seulement d'ordre 1 en espace. Pour y remédier à ce problème, il faut construire une approximation de $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial x}(1,t)$, d'ordre 2 en espace en introduisant des points fictifs.

   — Schéma d'Euler explicite : $U^{n+1} = M'(-\alpha)U^n$.

   — Schéma de Crank-Nicolson : $M'\left(\frac{\alpha}{2}\right)U^{n+1} = M'\left(\frac{\alpha}{2}\right)U^n$.

3. On considère la condition de périodicité $u(0,t) = u(1,t)$. Comment adapter les schémas ? On précisera notamment les formats des vecteurs et matrices considérés. Du point de vue discret, la condition de périodicité $u(0,t) = u(1,t)$ conduit à imposer

$$u_0^n = u_{N+1}^n, \quad \forall n \geqslant 0.$$

   — Schéma d'Euler implicite : en utilisant les conditions de périodicité ce schéma s'écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} -\alpha u_{j-1}^{n+1} + (1+2\alpha)u_j^{n+1} - \alpha u_{j+1}^{n+1} &= u_j^n, \forall j = 1, \cdots, N, \\ u_{N+1}^{n+1} &= u_0^{n+1}, \\ u_{-1}^{n+1} &= u_N^{n+1}. \end{aligned}$$

— Schéma d'Euler explicite : en utilisant les conditions de périodicité ce schéma s'écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \nu \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{h^2} &= 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant N, \\ u_{N+1}^n &= u_0^n, \\ u_{-1}^n &= u_N^n. \end{aligned}$$

— Schéma de Crank-Nicolson : en utilisant les conditions de périodicité ce schéma s'écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \nu \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{2h^2} - \nu \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{2h^2} &= 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant N, \\ u_{N+1}^n &= u_0^n, \\ u_{-1}^n &= u_N^n. \end{aligned}$$