Exercice n°1

1. Déterminer par la méthode des rectangles à droite puis celle des trapèzes la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{1/2} f(x)dx$.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0. 5
$f(x)$	1	1.1051709	1. 2214027	1.3498588	1.4918246	1.6487212

— **Rappel :** Pour tout cet exercice, découpons $[a; b]$ en sous-intervalles à pas constant h ($h \in R^{*+}$), notés $[x_i, x_{i+1}]$. Ainsi

$$x_0 = a;\ x_N = b;\ \forall i \in \{0, \dots, N-1\} :\ x_{i+1} - x_i = h.$$

d'où $h = \dfrac{b-a}{N}$. Par suite pour tout i de $\{0, \dots, N\}$: $x_i = a + ih$.

— L'approximation de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ par la formule des rectangles (à gauche et à droite) est

$$I_{RG}(f) \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) = h \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)\,; \quad I_{RD}(f) \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_{i+1}) = h \sum_{i=0}^{N-1} f(x_{i+1})$$

Avec les valeurs de l'énoncé on a $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$ et $N = \frac{b-a}{x_{i+1}-x_i} = \frac{1/2-0}{0.1} = 5$, on obtient

$$\begin{aligned} I_{RG}(f) &\approx 0.1\,(f(0) + f(0.1) + f(0.2) + f(0.3) + f(0.4)) \\ &\approx 0.1\,(1 + 1.1051709 + 1.2214027 + 1.3498588 + 1.4918246) \approx 0.61147951 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I_{RD}(f) &\approx 0.1\,(f(0.1) + f(0.2) + f(0.3) + f(0.4) + f(0.5)) \\ &\approx 0.1\,(1.1051709 + 1.2214027 + 1.3498588 + 1.4918246 + 1.6487212) \approx 0.67635763 \end{aligned}$$

— L'approximation de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ par la formule des trapèzes est

$$I_T(f) \approx \frac{b-a}{N}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right] = h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right]$$

Avec les valeurs de l'énoncé on a $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$ et $N = \frac{b-a}{h} = \frac{b-a}{x_{i+1}-x_i} = \frac{1/2-0}{0.1} = 5$, on obtient

$$\begin{aligned} I_T(f) &\approx \frac{1/2-0}{5}\left[\frac{f(0)+f(0.5)}{2} + f(0.1) + f(0.2) + f(0.3) + f(0.4)\right] \\ &\approx 0.1\left[\frac{1+1.6487212}{2} + 1.1051709 + 1.2214027 + 1.3498588 + 1.4918246\right] \approx 0.64926176. \end{aligned}$$

Hammou El-Otmany

2. Ces points sont ceux donnant $f(x) = e^x$. Comparer les résultats obtenus avec la valeur exacte. On $I_{Exact} = \int_0^{1/2} e^x dx = [e^x]_0^{1/2} = e^{1/2} - 1 \approx 0.68472127$. L'erreur réelle commise est ainsi égale à

$$\begin{aligned} |I_{Exact} - I_{RD}| &= |0.64872127 - 0.67635763| = 0.02763503, \\ |I_{Exact} - I_{RG}| &= |0.64872127 - 0.61147951| = 0.03724176, \\ |I_{Exact} - I_T| &= |0.64872127 - 0.64926176| = 0.00054049. \end{aligned}$$

Remarques :

— L'erreur commise par la formule des rectangles composite est

$$E_N^R = \frac{(b-a)^2}{2N} f'(\xi), \quad \xi \in [a, b]$$

On peut écrire aussi $E_N^R \leqslant \frac{(b-a)^2}{2N} \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|$. Pour se faire, il faut vérifier que f est de classe C^1 sur $[0; 1/2]$, $x \mapsto e^x$ est une fonction de classe C^∞ et $f'(x) = e^x$. La fonction $x \mapsto e^x$ étant croissante, donc

$$E_N^R \leqslant \frac{(1/2-0)^2}{2 \times 5} e^{1/2} = \frac{e^{1/2}}{40} \approx 0.04121803177.$$

— L'erreur commise par la formule des trapèzes est $E_N^T = \frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\xi), \quad \xi \in [a, b]$. On peut écrire aussi $E_N^T \leqslant \frac{(b-a)^3}{12N^2} \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)|$.

On a $f''(x) = e^x$ et croissante sur $[0; 1/2]$, donc $E_N^T \leqslant \frac{(1/2-0)^3}{12 \times 5^2} e^{1/2} = \frac{e^{1/2}}{2400} \approx 6.869672 \cdot 10^{-4}$

Exercice n°2 (partiel du 09 avril 2018) Voici le relevé de la vitesse d'écoulement de l'eau v dans un conduit cylindrique en fonction du temps t :‘

$t(s)$	0	10	20	30	40	50	60
$v(m/s)$	2	1.98	1.7	1.44	1.32	1.20	1.02

La vitesse moyenne de l'eau en écoulement dans le conduit cylindrique peut être calculée par la relation suivante :

$$\bar{v} = v_{moy} = \frac{1}{60} \int_0^{60} v(t) dt.$$

1. Calculer la vitesse moyenne de l'eau v_{moy} par la méthode des rectangles à droite.

— On applique la méthode des rectangles à droite avec $a = 0$, $b = 60$ et $N = \frac{b-a}{h} = \frac{b-a}{t_{i+1}-t_i} = \frac{60-0}{10} = 6$. D'où

$$\begin{aligned} \bar{v}_{RD} &\approx \frac{1}{60} \times 10 \left(v(10) + v(20) + v(30) + v(40) + v(50) + v(60) \right) \\ &\approx \frac{1}{6} (1.98 + 1.7 + 1.44 + 1.32 + 1.20 + 1.02) \approx 1.113498333 m/s. \end{aligned}$$

2. Calculer la vitesse moyenne de l'eau v_{moy} par la méthode des trapèzes.

Hammou El-Otmany

— On applique la méthode des trapèzes avec $a = 0$, $b = 60$ et $N = \frac{b-a}{h} = \frac{b-a}{t_{i+1}-t_i} = \frac{60-0}{10} = 6$. D'où

$$\begin{aligned}\bar{v}_T &\approx \frac{1}{60} \times 10 \left(\frac{v(0)+v(60)}{2} + v(10) + v(20) + v(30) + v(40) + v(50) \right) \\ &\approx \frac{1}{6} \left(\frac{2+1.02}{2} + 1.98 + 1.7 + 1.44 + 1.32 + 1.20 \right) \approx 1.113498333 m/s.\end{aligned}$$

3. Peut-on déterminer la vitesse moyenne de l'eau v_{moy} par la méthode de Simpson ? Justifier rigoureusement votre réponse. Oui, il suffit d'appliquer cette méthode avec $a = 0$, $b = 60$ sur l'intervalle $[t_i, t_{i+2}]$. On a $h = \frac{b-a}{N} = 10$ donc $N = 6$.

$$\begin{aligned}\bar{v}_S &\approx \frac{1}{60} \times \frac{b-a}{6N} \sum_{i=0}^{N-1} \left[v(t_i) + 4v\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) + v(t_{i+1}) \right] \\ &\approx \frac{1}{60} \times \frac{b-a}{6N} \sum_{i=0}^{N-1} \left[v(a+ih) + 4f\left(a + h(i+\frac{1}{2})\right) + v(a+(i+1)h) \right] \\ &\approx \frac{1}{60} \times \frac{h}{3} \left[v(a) + v(b) + 4 \sum_{i=1, i\, impair}^{N-1} v(t_i) + 2 \sum_{i=2, i\, pair}^{N-2} v(t_i) \right] \\ &\approx \frac{1}{60} \times \frac{h}{3} \left[v(a) + v(b) + 4 \sum_{i=1}^{N/2} v(t_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{N/2-1} v(t_{2i}) \right]\end{aligned}$$

Numériquement, on a

$$\begin{aligned}\bar{v}_S &\approx \frac{1}{60} \times \frac{10}{3} \left[v(0) + v(60) + 4\left(v(10) + v(30) + v(50)\right) + 2\left(v(20) + v(40)\right) \right] \\ &\approx \frac{1}{18} \left[2 + 1.02 + 4(1.98 + 1.44 + 1.20) + 2(1.7 + 1.32) \right] \approx 1.53 m/s.\end{aligned}$$

Exercice n°3 On souhaite déterminer une valeur approchée de $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$, en subdivisant l'intervalle $[0; 1]$ en $N = 10$ sous-intervalles.

1. Majorer l'erreur commise en utilisant les différentes méthodes usuelles (rectangle à gauche, rectangle à droite, point milieu, trapèzes, Simpson). Pour répondre à cette question, on commence d'abord par donner la formule d'erreur associée à chaque méthode d'approximation. Ensuite, on vérifie que la fonction f est de classe C^2. Enfin, on majore la valeur absolue de $f'(\xi)$, $f''(\xi)$ et $f^{(4)}(\xi)$ par le maximum de la valeur absolue de la dérivée correspondante. La $x \mapsto e^{-x^2}$ est de classe C^∞ sur $[0; 1]$. On a donc

$$f'(x) = -2xe^{-x^2};\ f^{(2)}(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2};\ f^{(3)}(x) = (12x - 8x^3)e^{-x^2};\ f^{(4)}(x) = (12 - 48x^2 + 16x^4)e^{-x^2}$$

Pour $\xi \in [0; 1]$, on a :

— L'erreur de la méthode des rectangles à droite est $E_{RD} = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi)$, c-à-d :$E_{RD} \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f'(x)|$. Nous avons le choix entre deux méthodes :

— 1ère méthode : on utilise le tableau de variation pour trouver le maximum de f'. Pour se faire, on calcule $f''(x)$ puis on dresse son tableau de variation. On a $f^{(2)}(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2} = 0$, nous donne $2x^2 - 1 = 0$, d'où $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Hammou El-Otmany

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}/2$		$\sqrt{2}/2$		1		∞
$f^{(2)}(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$			
$f'(x)$		$\nearrow$	$\sqrt{2}e^{-1/2}$	$\searrow$	$-\sqrt{2}e^{-1}$	$\nearrow$	$-2e^{-1}$	$\nearrow$	

Comme $x \in [0;1]$, on en déduit que $|f'|$ admet un maximum en $x = 1$ et $\sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f'(x)| = |f'(1)| = 2e^{-1}$. Par conséquent

$$|E_{RD}| \leqslant \frac{(1-0)^2}{2} \times 2e^{-1} = e^{-1} \approx 0.3787944.$$

Remarque : nous pouvons aussi prendre le maximum de la fonction $|f'|$ au point $\sqrt{2}/2$ en utilisant sa convexité.

— On majore directement la fonction $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ pour $x \in [0;1]$. Si bien que $|f'(x)| \leqslant 2|x|e^{-x^2} \leqslant 2e^{-x^2}$. Par combinaison de la croissance de la fonction exponentielle et $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $-1 \leqslant -x^2 \leqslant 0$, donc $e^{-1} \leqslant e^{-x^2} \leqslant e^{-0^2} = 1$. Soit donc $|f'(x)| \leqslant 2$. Par conséquent :

$$|E_{RD}| \leqslant \frac{(1-0)^2}{2} \times 2 = 1.$$

Mais, cette erreur est grossière et nous ne permet de prendre des décisions.

— L'erreur de la méthode des rectangles à gauche est $E_{RG} = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi)$, c-à-d : $E_{RD} \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f'(x)|$.

— L'erreur de la méthode du point milieu est $E_{PM} = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$, c-à-d :$E_{PM} \leqslant \frac{(b-a)^3}{24} \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f''(x)|$.

— L'erreur de la méthode des trapèzes est $E_T = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$, c-à-d :$E_T \leqslant \frac{(b-a)^3}{12} \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f''(x)|$.

— L'erreur de la méthode de Simpson est $E_S = -\frac{(b-a)^5}{90 \times 2^5} f^{(4)}(\xi)$, c-à-d :$E_S \leqslant \frac{(b-a)^5}{90 \times 2^5} \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f^{(4)}(x)|$.

Remarques : Pour majorer grossièrement l'erreur, on utilise la relation : $|a+b| \leqslant |a| + |b|$. Cependant, on cherche le maximum de la fonction souhaitée sur $[a;b]$ via son tableau de variation pour avoir une majoration minimale.

2. Proposer une approche permettant de déterminer une valeur approchée de I à 10^{-10} près. (On pourra envisager une autre valeur de N).
voir l'exercice 4 où $f(x) = e^{-x^2}$.

Exercice n°4 On rappelle que l'erreur commise par la méthode des trapèzes pour une fonction f de classe $C^2([a;b])$ est majorée ainsi :

$$|I(f,a,b) - I_N(f,a,b)| \leqslant \frac{b-a}{12} h^2 \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)| = \frac{(b-a)^3}{12N^2} \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)|$$

Combien faut-il de subdivisions de $[0;1]$ pour évaluer l'intégrale $I = \int_0^1 xe^{-x}dx$ à 10^{-6} près ?

Hammou El-Otmany

— Il s'agit ici de déterminer le nombre de points minimum pour satisfaire la tolérance $\varepsilon = 10^{-6}$ donnée. Pour se faire, on vérifie d'abord que la fonction f est de classe C^2, puis on majore la valeur absolue de $f''(\xi)$ par le maximum de la valeur absolue de la dérivée correspondante. f est de classe C^2 car c'est le produit de fonction de classe C^2 sur $[a;b]$. On a $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = xe^{-x}$ pour $x \in [0;1]$. Alors :

$$f'(x) = e^{-x}(1-x); \quad f''(x) = (x-2)e^{-x}$$

— 1ère méthode : on dresse le tableau de variation de la fonction f'' en calculant $f^{(3)}$ et on cherche ses racines ($f^{(3)}(x) = 0$). On a $f^{(3)}(x) = (3-x)e^{-x} = 0$, donne $x = 3$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f^{(3)}(x)$		$+$	0	$-$	
$f^{(2)}(x)$		$\nearrow$	e^{-3}	$\searrow$	-2e^{-1}

Or $x \in [0;1]$, donc $\sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f^{(2)}(x)| \leqslant e^{-3}$. Par conséquent :

$$|I(f,0,1) - I_N(f,0,1)| \leqslant e^{-3}\frac{(1-0)^3}{12N^2} \leqslant \varepsilon.$$

Soit$N^2 \geqslant \frac{e^{-3}}{12\varepsilon}$, si bien que $N \geqslant \sqrt{\frac{e-3}{12\varepsilon}}$. il suffit donc de choisir $N = \lfloor\sqrt{\frac{3}{12\varepsilon}}\rfloor$ où $\lfloor X \rfloor$ est le plus petit entier supérieur ou égal X.

Numériquement, on a donc en utilisant $\varepsilon = 10^{-6}$. On trouve $N = \lfloor\sqrt{\frac{e^{-3}}{12\times 10^{-6}}}\rfloor = \lfloor 64.41 \rfloor \approx 65$.

— 2ème méthode : La fonction $x \mapsto e^{-x}$ étant croissante sur $[0;1]$, on a sur $[0;1]$: $e^{-1} \leqslant e^{-x} \leqslant e^{-0} = 1$.

Sur $[0;1]$, on a également $|x-2| \leqslant |x| + 2 \leqslant 3$. Donc $|f''(x)| \leqslant 3$ pour $x \in [0;1]$. Avec $a = 0$, $b = 1$ et $h = \frac{b-a}{N} = \frac{1}{n}$, on trouve finalement

$$|I(f,0,1) - I_N(f,0,1)| \leqslant 3\frac{(1-0)^3}{12N^2} \leqslant \varepsilon.$$

Soit $N^2 \geqslant \frac{3}{12\varepsilon}$. Soit encore, $N \geqslant \sqrt{\frac{3}{12\varepsilon}}$. Par conséquent, il suffit donc de choisir $N = \lfloor\sqrt{\frac{3}{12\varepsilon}}\rfloor$. Numériquement, on a donc, en utilisant $\varepsilon = 10^{-6}$,

$$N = \lfloor\sqrt{\frac{3}{12 \times 10^{-6}}}\rfloor = [500] = 500.$$

Exercice n°5 On considère f une fonction de classe C^2 sur un intervalle $J = [a;b]$, que l'on subdivise en N sous-intervalles. On note respectivement I_{RG} ; I_{RD}, I_T, I_{PM}, I_S les approximations données par les méthodes usuelles (rectangles à gauche, rectangle à droite, trapèzes, point milieu, Simpson) de l'intégrale $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Hammou El-Otmany

1. Montrer que $I_T = \frac{I_{RD}+I_{RG}}{2}$. Pour démontrer ce résultat, on découpe l'intervalle $[a;b]$ en N sous intervalles de même longueur $\frac{b-a}{N}$: $[x_0;x_1],\ [x_1;x_2],\ldots,[x_{N-1},x_N]$ avec $x_0=a$ et $x_N=b$. On a par la relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

La méthode des trapèzes consiste à remplacer ces n intégrales par la somme suivante : (correspondant à la somme des aires algébriques des trapèzes de hauteur $(x_{i+1}-x_i\ )$ et de bases $f(x_{i+1})$ et $f(x_i)$.

$$\begin{aligned} I_T(f) &\approx \sum_{i=0}^{N-1}\frac{(x_{i+1}-x_i)(f(x_{i+1})+f(x_i))}{2} \approx \sum_{i=0}^{N-1}\frac{b-a}{N}\frac{(f(x_{i+1})+f(x_i))}{2} \\ &\approx \frac{b-a}{N}\left[\frac{f(a)+f(b)+2\sum\limits_{i=1}^{N-1}f(x_i)}{2}\right] = \frac{I_{RG}(f)+I_{RD}(f)}{2} \end{aligned}$$

On dit que la méthode des trapèzes est une combinaison linéaire des méthodes des rectangles à droite et à gauche.

2. Exprimer I_S en fonction de I_{PM} et I_T. On utilise la même démarche de la question 1., on a

$$\begin{aligned} 3I_S(f) &\approx \frac{b-a}{2N}\sum_{i=0}^{N-1}\left[f\left(x_i\right)+4f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+f\left(x_{i+1}\right)\right] \\ &\approx \frac{b-a}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{f\left(x_i\right)+f(x_{i+1})}{2}+\frac{b-a}{2N}\sum_{i=0}^{N-1}4f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) \approx I_T(f)+2I_{PM}(f) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$I_S(f)=\frac{I_T(f)+2I_{PM}(f)}{3}.$$

On dit alors que la méthode de Simpson est une combinaison linéaire de la méthode des trapèzes et du point milieu,

3. Lorsque l'on connaître $I_{RG}(f)$ comment calculer rapidement $I_{RT}(f)$? En utilisant l'expression de $I_{RG}(f)$ et celle de $I_{RD}(f)$, on obtient la relation suivante :

$$I_{RD}(f)=I_{RG}(f)+\frac{b-a}{N}\left[f(b)-f(a)\right].$$

4. On suppose que f est une fonction croissante. Montrer que l'on a les inégalités $I_{RG}(f)\leqslant I_T(f)\leqslant I_{RD}(f)$. En utilisant la croissance de f sur $[a;b]$, on obtient $f(a)\leqslant f(b)$. D'où $\frac{b-a}{N}\left[f(b)-f(a)\right]\leqslant 0$. Par conséquent

$$I_{RD}(f)\geqslant I_{RG}(f).$$

En utilisant $I_T(f)=\frac{I_{RG}(f)+I_{RD}(f)}{2}$, il vient que

$$I_{RG}(f)=\frac{I_{RG}(f)+I_{RG}(f)}{2}\leqslant I_T(f)=\frac{I_{RG}(f)+I_{RD}(f)}{2}\leqslant\frac{I_{RD}(f)+I_{RD}(f)}{2}=I_{RD}(f).\quad (CQFD)$$

Hammou EL-Otmany

5. On suppose maintenant que f est une fonction convexe. Montrer que $I_{PM}(f) \leqslant I(f) \leqslant I_T(f)$.
   On dit que f est convexe s'il existe $t \in [0;1]$ tel que

$$f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$$

   Par définition, on a $I_{PM}(f) = \frac{b-a}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} f\left(d\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)$. Pour $t = \dfrac{1}{2}$ et f convexe, il vient que

$$\begin{aligned}
I_{PM}(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(d\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) &\leqslant \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2}\left[f(x_i)+f(x_{i+1})\right] \\
&\leqslant \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)}{2}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right) \\
&\leqslant \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)}{2}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+\frac{f(x_n)}{2}\right) \leqslant I_T(f)
\end{aligned}$$

   Par combinaison de $I_{PM}(f) = \frac{I_{PM}(f)+2I_{PM}}{3}$, et $I_{PM}(f) \leqslant I_T(f)$ on aboutit à $I_{PM}(f) \leqslant \frac{I_T(f)+2I_{PM}}{3} = I_S(f) = I \leqslant \frac{I_T(f)+2I_T}{3} = I_T(f)$.

Hammou El-Otmany