Exercice n°1 Considérons la formule de quadrature suivante $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \omega_1 f(-\alpha) + \omega_2 f(\alpha)$ où $\alpha \in]0;1]$.

1. Déterminer les poids pour que cette formule de quadrature soit exacte pour les polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$. Posons $p_i(x) = x^i$ $(i = 0, 1)$ les polynômes de la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$, on écrit ainsi
$$I(p_0) = \int_{-1}^{1} dx = 2 = \omega_1 + \omega_2; \quad I(p_1) = \int_{-1}^{1} xdx = 0 = -\omega_1\alpha + \alpha\omega_2.$$
Comme $\alpha \in]0;1]$, on obtient ainsi $\omega_1 = \omega_2 = 1$. Par conséquent $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\alpha) + f(\alpha)$ où $\alpha \in]0;1]$.
2. On adopte désormais les poids déterminés à la question précédente. Quelle est la formule obtenue lorsque $\alpha = 1$? Est-elle exacte pour les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$?
Pour $\alpha = 1$, on a $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-1) + f(1) = J(f)$. Pour vérifier s'il est exacte les polynômes d'ordre $\leqslant 2$, il suffit de calculer
$$I(p_2) = J(p_2).$$
Or, $I(p_2) = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$ et $J(p_2) = 1 + 1 = 2$, soit $I(p_2) \neq J(p_2)$, donc la formule $J(f)$ n'est pas exacte pour les polynômes d'ordre $\leqslant 2$ avec $\alpha = 1$.
3. Montrer que cette formule de quadrature est exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$ pour une et une seule valeur de α à déterminer. Pour que cette formule de quadrature soit exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$, il faut qu'il vérifie
$$I(p_0) = \int_{-1}^{1} dx = 2 = \omega_1 + \omega_2; \quad I(p_1) = \int_{-1}^{1} xdx = 0 = -\omega_1\alpha + \alpha\omega_2;$$
$$I(p_2) = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} = \alpha^2\omega_1 + \alpha^2\omega_2 = \alpha^2(\omega_1 + \omega_2)$$
On obtient donc $\alpha^2 = \frac{1}{3}$, or $\alpha \in]0;1]$. Par conséquent $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
4. On adopte la valeur de α déterminée à la question précédente. La formule est-elle exacte sur $\mathbb{R}_3[X]$?
$$I(p_3) = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0; \quad J(p_3) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3$$
si bien que $I(p_3) = J(p_3)$, donc la formule est exacte sur $\mathbb{R}_3[X]$.

sur $\mathbb{R}_4[X]$?
$$I(p_4) = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5}; \quad J(p_4) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4 = \frac{2}{9}$$
donc $I(p_4 - \neq J(p_4)$. Par conséquent, la formule n'est pas exacte sur $\mathbb{R}_4[X]$

5. Adapter la formule obtenue à une intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$,

On utilise le changement de variables $x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$ pour passer de l'intervalle $[0;1]$ à $[-1;1]$. En effet, on pose $x = \alpha t + \beta$. On a pour $x = 0 = \alpha \times (-1) + \beta$, pour $x = 1 = \alpha \times 1 + \beta$, donc $\beta = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{1}{2}$. On en déduit directement la méthode d'approximation

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 f\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right)dt \approx \frac{1}{2}f\left(-\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}\right)$$

puis à une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

On utilise le changement de variables $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$ pour passer de l'intervalle de $[a;b]$ à $[-1;1]$. on obtient la méthode suivante

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right)dt \\ &\approx \frac{b-a}{2}\left[f\left(-\frac{(b-a)\sqrt{3}}{6} + \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{(b-a)\sqrt{3}}{6} + \frac{a+b}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

6. Exprimer la formule composite obtenue lorsque l'on subdivise l'intervalle $[a;b]$ en n sous-intervalles.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et une subdivision uniforme $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $[a;b]$ de pas $h = \frac{b-a}{n}$, c'est-à-dire $x_i = a + ih$. En utilisant le changement de variable $x = x_i + \frac{h}{2}(1+s)$, on peut approcher facilement $\displaystyle\int_{x_i}^{x_i+1} f(x)dx$, i étant fixé, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. On a donc

$$\int_{x_i}^{x_i+1} f(x)dx = \frac{h}{2}\int_{-1}^1 f(x_i + \frac{h}{2}(1+s))ds = \frac{h}{2}\left[f\left(x_i + \frac{h}{2}(1 - \frac{\sqrt{3}}{3})\right) + f\left(x_i + \frac{h}{2}(1 + \frac{\sqrt{3}}{3})\right)\right]$$

On obtient la formule composite en utilisant la relation de Chasles pour découper l'intégrale sur chaque intervalle

$$J_{comp}(f) \approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f\left(x_i + \frac{h}{2}(1 - \frac{\sqrt{3}}{3})\right) + f\left(x_i + \frac{h}{2}(1 + \frac{\sqrt{3}}{3})\right)\right]$$

Exercice n°2

1. Soit la formule de quadrature $I(f) = \int_0^1 f(x)dx \approx \omega_1 f(0) + \omega_2 f(\alpha) = J(f)$ où $\alpha \in]0;1]$.
   (a) Déterminer les poids pour que la formule soit exacte sur $\mathbb{R}_1[X]$. Posons $p_i(x) = x^i$ $(i = 0, 1)$ les polynômes de la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$, on écrit ainsi

$$I(p_0) = \int_0^1 dx = 1 \approx \omega_1 + \omega_2; \quad I(p_1) = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2} \approx \omega_2 \alpha$$

   Donc $\omega_2 = \frac{1}{2\alpha}$ et $\omega_1 = 1 - \omega_2 = 1 - \frac{1}{2\alpha} = \frac{2\alpha-1}{2\alpha}$ avec $\alpha \in]0;1]$.
   Par conséquent $J(f) = \frac{2\alpha-1}{2\alpha} f(0) + \frac{1}{2\alpha} f(\alpha)$ avec $\alpha \in]0;1]$.
   (b) Déterminer α pour que la méthode soit exacte pour les polynômes de degré $\leqslant 2$. Pour déterminer α, on utilise $I(p_2) = J(p_2)$, si bien que $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} = \omega_1 \times 0^2 + \omega_2 \times \alpha^2$. Or $\omega_2 = \frac{1}{2\alpha}$ d'après la question (a), on en déduit que $\alpha = \frac{2}{3}$. Par conséquent $J(f) = \frac{2\alpha-1}{2\alpha} f(0) + \frac{1}{2\alpha} f(\alpha) = \frac{1}{4} f(0) + \frac{3}{4} f\left(\frac{2}{3}\right)$.
   (c) Adapter la formule obtenue à un intervalle $[0; h]$. On utilise le changement de variables $x = hs$ pour passer de $[0; h]$ à $[0; 1]$ et on a

$$\int_0^h f(x)dx = h \int_0^1 f(hs)ds = h\left[\frac{1}{4} f(0) + \frac{3}{4} f\left(\frac{2}{3} h\right)\right]$$

2. On va dans le cas de cette formule pour une intégrale $\int_0^h f(x)dx$ prouver une estimation de l'erreur commise par la formule de quadrature pour une fonction f supposée de classe C^3 sur $[0; h]$. On notera $I(f) = \int_0^h f(x)dx$, $Q(f)$ l'approximation donnée par la formule de quadrature, et enfin $E(f) = I(f) - Q(f)$.
   (a) Soit $M_3 = \sup_{0 \leqslant x \leqslant h} |f^{(3)}(x)|$. Montrer que l'on peut écrire $f(x) = P(x) + R(x)$ avec P un polynôme de degré 2, que l'on précisera et R une fonction vérifiant

$$\forall x \in [0; h], \ |R(x)| \leqslant \frac{M_3}{6} x^3.$$

   Comme f est de classe $C^3([0; h])$, pour tout $x \in [0; h]$, il existe un $\xi_x \in]0; x[$ tel que (développement de Taylor-Lagrange de f à l'ordre 2) :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(\xi_x) \\ &= f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f^{(2)}(0) + \frac{x^3}{6} f^{(3)}(\xi_x) = P(x) + R(x) \end{aligned}$$

   où $P(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f^{(2)}(0)$ et $R(x) = \frac{x^3}{6} f^{(3)}(\xi_x)$
   (b) Majorer en fonction de M_3 et de h les valeurs de $|I(R)|$, de $|Q(R)|$, de $|E(R)|$.
   On a

$$|I(R)| = \left| \int_0^h R(x)dx \right| \leqslant \frac{M_3}{6} \int_0^h x^3 dx = \frac{M_3}{24} h^4.$$

On a $Q(R) = h\left[\frac{1}{4}R(0) + \frac{3}{4}R\left(\frac{2}{3}h\right)\right]$ avec $R(x) = \frac{x^3}{6}f^{(3)}(\xi_x)$. On en déduit que

$$|Q(R)| \leqslant h\left[\frac{3}{4}\frac{\left(\frac{2}{3}h\right)^3}{6}|f^{(3)}(\xi_x)|\right] \leqslant \frac{M_3}{54}h^4$$

Comme $E(R) = I(R) - Q(R)$, on obtient

$$|E(R)| \leqslant |I(R)| + |Q(R)| = \frac{M_3}{24}h^4 + \frac{M_3}{54}h^4 = \frac{13M_3}{216}h^4$$

(c) En déduire une majoration de $|E(f)|$.
On a par linéarité $E(f) = E(P) + E(R)$ et même $E(f) = E(R)$ puisque $E(P) = I(P) - Q(P) = 0$ car la méthode d'intégration d'intégration numérique Q est d'ordre 2, voir la question 1.(c). On obtient

$$|E(f)| = |E(R)| \leqslant \frac{13M_3}{216}h^4.$$

3. — Donner la formule composite pour le calcul d'une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ associée à la formule de quadrature élémentaire étudiée.
Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et une subdivision uniforme $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $[a;b]$ de pas $h = \frac{b-a}{n}$, c'est-à-dire $x_i = a + ih$. En utilisant le changement de variable $x = hs + x_i$, on peut approcher facilement $\displaystyle\int_{x_i}^{x_i+1} f(x)dx$, i étant fixé, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. On a donc

$$\int_{x_i}^{x_i+1} f(x)dx = h\int_0^1 f(hs + x_i)ds = h\left[\frac{1}{4}f\left(x_i\right) + \frac{3}{4}f\left(\frac{2}{3}h + x_i\right)\right]$$

On obtient la formule composite en utilisant la relation de Chasles pour découper l'intégrale sur chaque intervalle

$$Q_{comp}(f) \approx \frac{h}{4}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f\left(x_i\right) + 3f\left(\frac{2}{3}h + x_i\right)\right], \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

— Donner une majoration de l'erreur lorsqu'on utilise cette formule composite.
La méthode étant d'ordre $n = 2$, on obtient pour toute fonction f de classe $C^3([a;b])$:

$$|E(f)| \leqslant \frac{13M_3}{216}\frac{(b-a)^5}{n^4}$$

La méthode converge donc comme $\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$, on a une convergence d'ordre 4. Autrement dit, quand on multiplie par 10 le nombre d'intervalle, on divise par 10000 l'erreur commise.

Exercice n°3 Soit une formule de quadrature élémentaire à p points. Montrer que cette formule ne peut pas être exacte pour tous les polynômes de $R_{2p}[X]$. (Indication : considérer le polynôme $Q(x) =$

$\prod_{i=1}^{p}(x-\alpha_i)^2)$.
Si on interpole la fonction f de classe C^{p+1} par le polynôme de degré p, grâce aux points d'interpolation $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_p$. Pour tout $x \in [a;b]$, il existe un $\eta \in [a_0; a_p]$ tel que

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{(p+1)!} f^{(p+1)}(\eta)\Phi(x)$$

où $\Phi(x) = \prod_{i=0}^{p}(x-a_i)$.
Idée de la preuve : on étudie la fonction $g(z) = f(z) - P(z) - (f(x) - P(x))\frac{\Phi(z)}{\Phi(x)}$. g s'annule $p+2$ fois $\Longrightarrow g'$ s'annule $(p+1)$ fois.
... $g^{(p+1)}$ s'annule une fois en η.
Or $\Phi^{(p+1)}(x) = (p+1)!h(x)$ où $d^\circ h = p-1$ et $P^{(p+1)}(x) = 0$.

Exercice n°4 Soit p un entier avec $p > 1$. La formule à p points définie par

$$I(f) = \int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} f\left(\frac{i-1}{p-1}\right) = J(f)$$

est-elle exacte sur $\mathbb{R}_1[X]$? sur $\mathbb{R}_2[X]$?
Remarque : La réponse à cet exercice utilise les sommes usuelles :

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n; \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Posons $p_i(x) = x^i$ $(i = 0, 1)$ les polynômes de la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$.

1. Pour montrer que J est exacte pour les polynômes $\mathbb{R}_1[X]$, il faut vérifier les conditions suivantes :
   - i $I(p_0) = J(p_0)$. On a $I(p_0) = \int_0^1 dx = 1$ et $J(p_0) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} p_0\left(\frac{i-1}{p-1}\right) = \frac{p}{p} = 1$. D'où $I(p_0) = J(p_0)$.
   - ii $I(p_1) = J(p_1)$. On a $I(p_1) = \int_0^1 xdx = \dfrac{1}{2}$ et $J(p_1) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} p_1\left(\dfrac{i-1}{p-1}\right) = \dfrac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\left(\dfrac{i-1}{p-1}\right) = \dfrac{1}{p(p-1)}\left(\sum_{i=1}^{p} i - \sum_{i=1}^{p} 1\right) = \dfrac{1}{p(p-1)}\left(\dfrac{p(p+1)}{2} - p\right) = \dfrac{p(p+1)-2p}{2p(p-1)} = \dfrac{1}{2}$. D'où $I(p_1) = J(p_1)$.

   Par conséquent la formule J est exacte pour les polynômes $\mathbb{R}_1[X]$.
2. Pour montrer que J est exacte pour les polynômes $\mathbb{R}_2[X]$, il faut vérifier la condition suivante (en plus des conditions i. et ii.) :
   - iii $I(p_2) = J(p_2)$. On $I(p_2) = \int_0^1 x^2dx = \dfrac{1}{3}$ et $J(p_2) = \dfrac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} p_2\left(\frac{i-1}{p-1}\right) = \dfrac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{i-1}{p-1}\right)^2 = \dfrac{1}{p(p-1)^2}\sum_{i=1}^{p}(i-1)^2 = \dfrac{1}{p(p-1)^2}\sum_{j=0}^{p-1} j^2 = \frac{1}{p(p-1)^2}\sum_{j=1}^{p-1} j^2 = \dfrac{1}{p(p-1)^2}\dfrac{(p-1)p(2(p-1)+1)}{6} = \dfrac{p(2(p-1)+1)}{6p(p-1)}$. Donc $I(p_2) \neq J(p_2)$.

   Par conséquent, la formule J n'est pas exacte pour les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.