Module MA322
Corrigé de travaux dirigés n° 8
———-
Opérations sur les développements limités

Aéro. 3
Semestre : 2
A.U. : 2021-2022
Prof. H. El-Otmany

Définition : Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $I=(a,b)$ et $x_0 \in I$.

i. On dit que f est négligeable devant g au $\mathcal{V}(x_0)$(voisinage de x_0) et on note $f = o_{x_0}(g)$ si $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$.

ii. On dit que f est dominée par g au $\mathcal{V}(x_0)$ et on note $f(x) = \mathcal{O}_{x_0} g(x)$ s'il existe une constante $C>0$ telle que $|f(x)| \leqslant C|g(x)|$ au $\mathcal{V}(x_0)$.

iii. Si $g(x_0) \neq 0$,on dit que f est équivalente à g en x_0 et on note $f \sim_{x\longrightarrow x_0} g$ si $f(x) = g(x) + o_{x_0}(g(x))$ (si g ne s'annule pas en x_0, cette définition est équivalente à : il existe un $\mathcal{V}(x_0)$sur lequel $g \neq 0$: $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$).

iv. La relation $\sim_{x_0}$ est une relation d'équivalence, c'est-à-dire que l'on a $f \sim_{x_0} f$, $f \sim_{x_0} g \Longrightarrow g \sim_{x_0} f$, et $f \sim_{x_0} g$, $g \sim_{x_0} h \Longrightarrow f \sim_{x_0} h$.

Division : Pour calculer le DL d'un quotient $F = \frac{f}{g}$ où $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$ et $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + o(x^n)$, on utilise le DL de $u \mapsto \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + \cdots$ (on arrête à l'ordre souhaité selon les besoins).

i. si $b_0 = 1$, on pose $u = b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + o(x^n)$ et le quotient F s'écrit ainsi $F = f \times \frac{1}{1+u}$, puis on applique la propriété de DL du produit.

ii. si b_0 est quelconque et $b_0 \neq 0$, alors on factorise par b_0 dans le dénominateur et on se ramène au cas i. :

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b_0\left(1 + \frac{b_1}{b_0}x + \frac{b_1}{b_0}x^2 + \cdots + \frac{b_n}{b_0}x^n + \frac{1}{b_0}o(x^n)\right)}.$$

iii. Si $b_0 = 0$ alors on factorise par x^p (pour un certain p) afin de se ramener aux cas i. et ii.

Exercice n°1 Déterminer les développements limités en 0 et à l'ordre n des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{1+x}$, $n=4$.

   1ère méthode : On a

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = \ln(1+x) \times \frac{1}{1+x}$$

   Il suffit donc d'écrire le DL à l'ordre 4 de $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ au voisinage de 0. On a ainsi

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4),$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4),$$

   d'où

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = \ln(1+x) \times \frac{1}{1+x} = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)\right).$$

On écrive le DL en omettant tous les termes de degré supérieur strictement à 4 lors de la multiplication :

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x)}{1+x} &= (x-x^2+x^3-x^4)+\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{2}\right)+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{3}\right)+\left(-\frac{x^4}{4}\right)+o(x^4)\\ &= x-\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{6}x^3-\frac{11}{6}x^4+o(x^4).\end{aligned}$$

$2^{\text{ème}}$ **méthode :** Soit $f(x)=C(x)+o(x^n)$ et $g(x)=D(x)+o(x^n)$. On écrit ainsi la division suivant les puissances croissantes de C par D à l'ordre n : $C=DQ+x^{n+1}R$ avec $degQ\leqslant n$. Alors, Q est la partie polynomiale du $DL_n(0)$ de $\frac{f}{g}$.

2. $x\mapsto \ln(\mathrm{ch}(x))$, $n=3$.
On a par définition $ch(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Donc, on peut déduire le $DL_3(0)$ du cosinus hyperbolique à partir de celui de l'exponentielle $x\mapsto e^x$ ou de celui de cosinus avec tous les signes positifs. Comme $x\mapsto ch(x)$ est une fonction paire, donc son DL fait apparaître les monômes avec des puissances paires. Au voisinage de 0, le DL_3 de

$$\mathrm{ch}(x)=1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

et le DL_2

$$\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+o(u^2).$$

Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin, car en posant $u=\frac{x^2}{2}+o(x^3)$, on a déjà $o(u^2)=\frac{x^4}{4}+o(x^4)$. On a en introduisant dans le DL de $\ln(1+u)$ et utilisant la parité de $x\mapsto\ln(ch(x)$:

$$\ln(\mathrm{ch}(x)=\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

3. $x\mapsto\frac{e^x}{\cos(x)}$, $n=5$.
Au voisinage de 0, on a

$$\frac{e^x}{\cos(x)}=\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)}$$

En utilisant le DL de $u\mapsto\frac{1}{1+u}$ avec $u=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+u} &= u-\frac{u^2}{2}+o(u^3)\\ \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)} &= -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)^2+o(x^5)\\ &= -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{8}+o(x^5)\\ &= -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+o(x^5)\end{aligned}$$

ici, on note qu'à partir de u^2 on obtient certaines puissances de x d'ordre au moins 6). Par multiplication de DL, on arrive à

$$\begin{aligned}
\frac{e^x}{\cos(x)} &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \times \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + o(x^5)\right) \\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{12} + o(x^5) \\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{12} + o(x^5).
\end{aligned}$$

4. $x \mapsto \arcsin(x)$, $n = 5$.
   On peut retrouver rapidement le développement limité de $\arcsin$ en 0. La dérivée de $x \mapsto \arcsin(x)$ est $x \mapsto (1-x^2)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Alors, on peut faire un $DL_4(0)$ de $x \mapsto (1-x^2)^{-1/2}$. puis l'intégrer (intégrer fait augmenter l'ordre de DL). On pose $u = -x^2$, on obtient au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
\left(1-x^2\right)^{-1/2} &= (1+u)^{-1/2} = 1 - \frac{u}{2} + \frac{3u^2}{8} + o(u^2) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)
\end{aligned}$$

   Comme $\arcsin(0) = 0$, il vient que

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5).$$

5. $x \mapsto \frac{\mathrm{sh}(x)-x}{x^3}$, $n = 4$.
   On rappelle les DL en 0 pour $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ qui ressemblent au DL pour $x \mapsto \sin(x)$ mais tous les signes sont positifs. En outre, la fonction hyperbolique est impaire, alors elle fait apparaitre que les monômes avec des puissances impaires. Au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}(x) &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{7!} + o(x^7), \\
\mathrm{sh}(x) - x &= \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + + \frac{x^7}{7!} + o(x^7), \\
\frac{\mathrm{sh}(x) - x}{x^3} &= \frac{1}{x^3}\left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{7!} + o(x^7)\right) \\
&= \frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} + \frac{x^4}{7!} + o(x^4)
\end{aligned}$$

Exercice n°2 Déterminer les développements limités en a et à l'ordre n des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sin(x)$, $a = \frac{\pi}{4}$, $n = 3$.
   $1^{\text{ère}}$ **méthode :** Calculons le développement limité de la fonction $f(x) = \sin(x)$ à l'ordre 3 au point $\frac{\pi}{4}$ que l'on note par $DL_3(\frac{\pi}{4})$. Si on pose $x = \pi/4 + h$, alors, dire que x est au voisinage de $\pi/4$

revient à dire que h est au voisinage de 0. On considère donc la fonction $g(h) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + h\right)$ et on calcule son développement à l'ordre 3 en 0 que l'on note par $DL_3(0)$. On sait que $\sin\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \cos(\frac{\pi}{4} \sin(h) + \sin(\frac{\pi}{4}) \cos(h) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin(h) + \cos(h)\right)$. On a

$$\begin{aligned} \sin(h) &= h - \frac{h^3}{6} + o(h^3) \\ \cos(h) &= 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^3) \end{aligned}$$

En utilisant le DL de la somme, on obtient

$$\begin{aligned} g(h) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(h - \frac{h^3}{6} + o(h^3) + 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^3)\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}h - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{h^2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{h^3}{6} + o(h^3) \end{aligned}$$

En remplaçant h par $x - \frac{\pi}{4}$, on obtient le $DL_3(\frac{\pi}{4})$ de $\sin(x)$:

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(x-\frac{\pi}{4})^3}{6} + o(x - \frac{\pi}{4})^3$$

avec $\lim\limits_{x \longrightarrow \pi/4} \varepsilon(x - \frac{\pi}{4}) = 0$.

$2^{\text{ème}}$ **méthode :** vous pouvez calculer directement le $DL_3(a = \frac{\pi}{4})$ de $f(x) = \sin(x)$ en utilisant la formule suivante :

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f^{(3)}(a) + o(x-a)^3.$$

En calculant $(f^{(k)}$ en $x = \frac{\pi}{4}$ pour $k = 0, 1, \cdots, 3$, on arrive à

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(x-\frac{\pi}{4})^3}{6} + o\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3.$$

2. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$, $a = 1$, $n = 4$.On a $\frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{\ln((x-1)+1)}{x^2} = \ln(x) \times \frac{1}{x^2}$. Posons $x = u + 1 \mapsto u = x - 1$ et $x^2 = (1+u)(1+u)$, alors dire que u est au voisinage de 0 revient à dire que x est au voisinage de 1. Au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned} \ln(1+u) &= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4) \\ \frac{1}{1+u} &= 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o(u^4). \end{aligned}$$

En utilisant la multiplication des DLs et la troncature à l'ordre 4, on arrive à

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} &= \frac{1}{1+u} \times \frac{1}{1+u} \\ &= \left(1 - u + u^2 - u^3 + u^4\right)\left(1 - u + u^2 - u^3 + u^4\right) + o(u^4). \\ &= (1 - u + u^2 - u^3 + u^4) - u(1 - u - u^3 + u^4) + (u^2 - u^3 + u^4) + (-u^3 + u^4) + u^4 + o(u^4) \\ &= 1 - 2u + 3u^2 - 4u^3 + 5u^4 + o(u^4) \end{aligned}$$

En utilisant $\frac{\ln(x)}{x^2} = \ln(1+u) \times \frac{1}{(1+u)^2}$, la multiplication des DLs et la troncature à l'ordre 4, on arrive à

$$\begin{aligned}\frac{\ln(x)}{x^2} &= \left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4}\right)\left(1 - 2u + 3u^2 - 4u^3 + 5u^4\right) + o(u^4)\\ &= (u - 2u^2 + 3u^3 - 4u^4) + \left(-\frac{u^2}{2} + 2\frac{u^3}{2} + 4\frac{u^4}{2}\right) + \left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^4}{3}\right) - \frac{u^4}{4} + o(u^4)\\ u - \frac{5u^2}{2} + \frac{13u^3}{3} - \frac{77u^4}{12} + o(u^4).\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $u = x-1$, on obtient le $DL_4(1)$ de $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$:

$$\frac{\ln(x)}{x^2} = (x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{13}{3}(x-1)^3 - \frac{77}{12}(x-1)^4 + o((x-1)^4).$$

Exercice n°3 Calculer les limites suivantes :

Rappel : Lors des calculs de limites, les formes suivantes sont indéterminées :

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 0 \times \infty; \quad +\infty + (-\infty).$$

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x}$.On calcule la limite de f en 0, on obtient une forme indéterminée (FI) :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x} = \frac{0}{0}$$

Ici, le dénominateur est de degré 1 (infiniment petit d'ordre 1 en 0), il suffit donc de faire un $DL_1(0)$ du numérateur pour lever la FI. Au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x + o(x),\\ \sin(x) &= x + o(x),\\ \ln(1+x) - \sin(x) &= o(x),\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x} = \frac{o(x)}{x} = o(1)$$

Par conséquent, on en déduit $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x} = 0$.

2. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}$.On calcule la limite de f en 0, on obtient une forme indéterminée (FI) :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2} = \frac{0}{0}$$

Ici, le dénominateur est de degré 2 (infiniment petit d'ordre 2 en 0), il suffit donc de faire un $DL_2(0)$ du numérateur pour lever la FI. Au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + o(x), \\ e^{x^2} &= 1 + x^2 + o(x^2), \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \\ e^{x^2} - \cos(x) &= (1 + x^2) - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) = \frac{3x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2} = \frac{\frac{3x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{2} + o(1)$$

Par conséquent, on en déduit $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2} = \frac{3}{2}$.

Règle de L'Hôpitale :

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = ... \\ \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2} &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{2xe^{x^2} + \sin(x)}{2x} \\ &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{4x^2e^{x^2} + 2e^{x^2} + \cos(x)}{2} = \frac{0 + 2 + 1}{2} \end{aligned}$$

3. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.On calcule la limite de f en $+\infty$, on obtient une forme indéterminée (FI) :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty - \infty \times 0$$

Posons $u = \frac{1}{x}$, u tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Donc, on peut utiliser le développement limité usuel de $u \mapsto \ln(1+u)$ en 0 à l'ordre 3, on écrit ainsi

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$$

Or $x = \frac{1}{u}$, on en déduit le $DL_3(+\infty)$ de

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

D'où

$$x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x - x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Par un simple calcul, on arrive à

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$$

($\rightsquigarrow$ la courbe de $x \mapsto x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ admet un asymptote au voisinage de $+\infty$.)

Exercice n°4 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{xe^x - \sin(x)}{x^2}$

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.On calcule la limite de f en 0, on obtient une FI :

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{xe^x - \sin(x)}{x^2} = \frac{0}{0}.$$

Ici, le dénominateur est de degré 2 (infiniment petit d'ordre 2 en 0), il suffit donc de faire un $DL_2(0)$ du numérateur pour lever la FI de $xe^x - \sin(x)$. Au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \\ \sin(x) &= x + o(x^2), \\ xe^x - \sin(x) &= x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Remarque : on peut écrire directement $xe^x - \sin(x) \sim_{x\longrightarrow 0} x^2$.

Par conséquent $\dfrac{xe^x - \sin(x)}{x^2} = 1 + o(1)$. D'où

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{xe^x - \sin(x)}{x^2} = \lim_{x\longrightarrow 0} 1 + o(1) = 1$$

Cette fonction est continue sur D_f et admet une limite finie en 0. On peut donc prolonger f par continuité en 0 et on écrit ainsi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^x - \sin(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 = f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2. Démontrer que ce prolongement est dérivable en 0.D'après la question 1., f admet un prolongement par continuité en 0. On utilise la définition de la dérivabilité en 0 :

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\frac{xe^x - \sin(x)}{x^2} - 1}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{xe^x - \sin(x) - x^2}{x^3}$$

Ici, le dénominateur est de degré 3 (infiniment petit d'ordre 3 en 0), il suffit donc de faire un $DL_3(0)$ du numérateur pour lever la FI de $xe^x - \sin(x)$. Au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \\ xe^x - \sin(x) &= x^2 + \frac{4x^3}{6} + o(x^3), \\ xe^x - \sin(x) - x^2 &= \frac{4x^3}{6} + o(x^3) = \frac{2x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

Par conséquent $\dfrac{xe^x - \sin(x) - x^2}{x^3} = \frac{2}{3} + o(1)$. D'où

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{xe^x - \sin(x) - x^2}{x^3} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2}{3} + o(1) = \frac{2}{3} := f'(0)$$

3. Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 du prolongement par continuité de f et sa position par rapport à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ du prolongement au voisinage de 0.
   - L'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0 du prolongement par continuité de f est donnée par $(T) : y = f(0) + (x-0)f'(0) = 1 + \frac{2}{3}x$.
   - Pour déterminer la position de la tangente (T) par rapport à la courbe $\mathcal{C}_f$, il suffit d'évaluer le signe de $f(x) - (1 + \frac{2x}{3})$ au voisinage de 0. En utilisant d'abord le développement à l'ordre 4 de f :

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),\\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4),\\
xe^x - \sin(x) &= x^2 + \frac{4x^3}{6} + \frac{x^4}{6} + o(x^4) = x^2 + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{6} + o(x^4),\\
\frac{xe^x - \sin(x)}{x^2} &= 1 + \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{6} + o(x^2).
\end{aligned}$$

     Ensuite, on évalue

$$f(x) - (1 + \frac{2x}{3}) = \frac{xe^x - \sin(x)}{x^2} - 1 - \frac{2x}{3} = x^2\left(\frac{1}{6} + o(1)\right)$$

     On conclut que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente (T) dans un voisinage de 0 car l'expression ci-dessus est positive dans un voisinage de 0.

Exercice n°5 Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x + x^2}$.

1. Déterminer le développement limité de la fonction $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ à l'ordre 2. On met x^2 en facteur sous les racines pour se ramener à effectuer un $DL(0)$. Au voisinage de $+\infty$, on a

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x + x^2}}{x} = \frac{\sqrt{x^2(\frac{1}{x} + 1)}}{x} = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$$

   Posons $u = \frac{1}{x}$, u tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Donc, on peut utiliser le développement limité usuel de $\sqrt{1+u}$ en 0 à l'ordre 1, on écrit ainsi

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$$

   Or $x = \frac{1}{u}$, on en déduit le $DL_2(+\infty)$ de

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

2. En déduire que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$ puis la déterminer. En utilisant la question 1. , on arrive à $f(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Par conséquent, la courbe d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est donc asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$ (car $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) - x - \frac{1}{2} = 0$).

3. Étudier la position entre $\mathcal{C}_f$ et cette asymptote au voisinage de $+\infty$.
   Pour obtenir la position relative de la courbe par rapport à l'asymptote, il faut pousser le développement limité un peu plus loin de $f(x)$ jusqu'à obtenir le premier terme non nul. On a

$$f(x) - x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}\left(\frac{1}{8} - o(1)\right)$$

   Au voisinage de $+\infty$, $-\frac{1}{x}\left(\frac{1}{8} - o(1)\right)$ est négatif : la courbe est sous l'asymptote.