1 Espaces Probabilistes finis, probabilités conditionnelles et indépendantes

Exercice n°1 Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire discrète, P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ et $P(A \cup B) = \frac{23}{60}$. Calculer $P(A \cap B)$, $P_B(A)$, $P(\overline{A}|B)$, $P_B(A \cap B)$, $P(A \cap \overline{B}|B)$, $P_{A\cap\overline{B}}(A \cup B)$. On sait que

- $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{23}{60} = \frac{15+20-23}{60} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$.
- $P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5}$.
- $P(\overline{A}|B) = P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.
- $P_B(A \cap B) = \dfrac{P((A \cap B) \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A \cap (B \cap B))}{P(B)} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}} = \frac{3}{5}$.
- $P(A\cap\overline{B}|B) = P_B(A\cap\overline{B}) = \dfrac{P((A \cap \overline{B}) \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A \cap (\overline{B} \cap B))}{P(B)} = \dfrac{P(A \cap \emptyset)}{P(B)} = \dfrac{P(\emptyset)}{P(B)} = 0$.
- $P_{A\cap\overline{B}}(A\cup B) = \dfrac{P((A \cup B) \cap (A \cap \overline{B}))}{P(A \cap \overline{B})} =$ On applique ici $A\cap\overline{B} = A \setminus B \subset A \subset A\cup B$. Donc $(A \cup B) \cap (A \cap \overline{B}) = A \cap \overline{B}$. D'où

$$P_{A\cap\overline{B}}(A \cup B) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A \cap \overline{B})} = 1.$$

Exercice n°2 Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire discrète, P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Démontrer que les événements A et B sont indépendants si et seulement si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

On suppose que A et B sont indépendants. Montrons que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants, i.e. $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B})$.

En utilisant la probabilité du complémentaire, on a

$$P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = 1 - P(B) - P(A) + P(A)P(B)$$

Comme A et B sont indépendants, il vient que

$$\begin{aligned} P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) &= 1 - P(B) - P(A) + P(A \cap B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\ &= 1 - P(A \cup B) = P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}). \end{aligned}$$

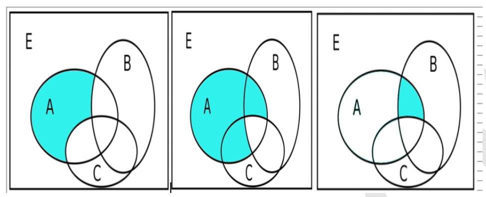
Ici, on a utilisé $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Soit E l'ensemble contenant A et B, on a

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \{x : \; x \in E \,\text{et}\, x \notin A \cup B\} \\ &= \{x : \; x \in E \,\text{et}\, (x \notin A \,ou\, x \notin B)\} \\ &= \{x : \; x \in E \,(x \notin A \,et\, x \notin B)\} = \overline{A} \cap \overline{B}. \end{aligned}$$

D'où $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants si A et B sont indépendants.
Réciproquement : si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants, montrons que A et B sont indépendants. La démonstration est facile, il suffit de remarque que $\overline{\overline{A}} = A$ et $\overline{\overline{B}} = B$,.

D'après la démonstration directe, on a $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants alors $\overline{\overline{A}} = A$ et $\overline{\overline{B}} = B$ sont indépendants. ! ! !CQFD

Rappel sur les lois de Morgan : soient A, B et C trois sous-ensemble d'un ensemble E. Alors, les assertions suivantes sont vérifiées :
- $A \cap (\overline{B \cap C}) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C})$ (Left figure).
- $A \cap \overline{(B \cup C)} = (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C})$ (Middle figure).
- $A \cap (B \cap \overline{C}) = (A \cap B) \cap \overline{C}$ (Right figure).
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
- $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$.



Exercice n°3 Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire discrète, P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{2}{5}$ et $P_B(\overline{A}) = P(\overline{A}|B) = \frac{1}{4}$. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Pour démontrer que A et B sont indépendants, il suffit de prouver que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. D'après les données, on a
- $P(A) \times P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$.
- Calculons $P(A \cap B)$. On sait que $P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, soit ainsi $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P_B(\overline{A})$. D'où

$$P(A \cap B) = P(B)\left(1 - P_B(\overline{A})\right) = \frac{2}{5}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{10}$$

Par conséquent $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \rightsquigarrow$ les événements A et B sont indépendants.

Exercice n°4 Un système est formé de deux composants c_1 et c_2. À la suite de tests, on a obtenu les résultats suivants :
- La probabilité que le composant c_1 fonctionne est égale à 0.8.
- La probabilité que les composants c_1 et c_2 ne fonctionnent pas est égale à 0.15.
- La probabilité que le composant c_2 est en panne est égale à 0.35.

On note A l'événement " le composant c_1 fonctionne" et B l'événement "le composant c_2 fonctionne".

1. Traduire les hypothèses en langage formel.

$$P(A) = 0.8; \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.15; \quad P(A \cap \overline{B}) = 0.35.$$

2. Calculer la probabilité que les composants c_1 et c_2 fonctionnent.
On utilise la formule des probabilités totales $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$ où B et $\overline{B}$ sont disjoints. On obtient ainsi

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B}) = 0.8 - 0.35 = 0.45.$$

3. Calculer la probabilité que les composants c_1 ou c_2 fonctionnent.
En appliquant la formule $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B})$ et la loi de Morgan, on arrive à

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0;15 = 0.85.$$

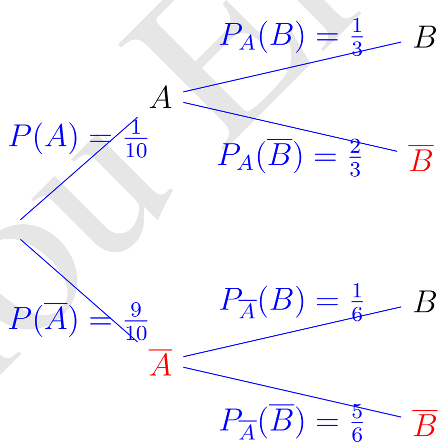
4. Calculer la probabilité que le composant c_2 fonctionne.
On applique la formule $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, soit ainsi

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = 0.85 - 0.8 + 0.45 = 0.5.$$

5. Calculer la probabilité que le composant c_1 soit en panne.
On applique la formule $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.8 = 0.2.$

Exercice n°5 Une boîte contient des dés avec leurs faces numérotés de 1 à 6 dont 10% sont pipés. Pour chacun des dés pipés, la probabilité d'obtenir 6 est égale à $\frac{1}{3}$.

On tire au hasard un dé de la boîte et en le lançant on obtient 6. Calculer la probabilité qu'il soit pipé.
On considère les deux événements A : "avoir un dé pipé" et B : "obtenir le nombre 6". D'après l'énoncé, on a $P(A) = 0.1$, $P(B) = \frac{1}{3}$ et $P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{6}$. Cette situation peut être modélisée par l'arbre de probabilité.



D'après la formule des probabilités totales sachant que B et $\overline{B}$ forment une partition de l'univers Ω :

$$\begin{aligned} P(B) =& P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) \\ =& \frac{1}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{30} + \frac{9}{60} = \frac{11}{60}. \end{aligned}$$

Donc la probabilité que le dé soit pipé est

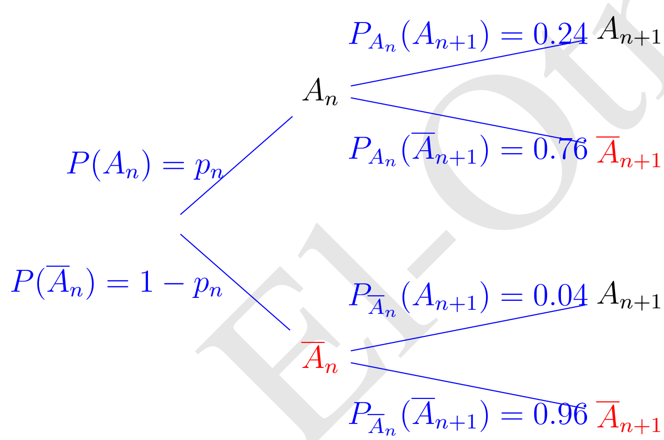
$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{11}{60}} = \frac{2}{11}.$$

Exercice n°6 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

— Un salarié malade est absent.
— La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
— Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité de 0.24.
— Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $(n+1)$ avec une probabilité de 0.04

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose l'événement A_n "le salarié est absent pour cause de maladie la semaine n" et $p_n = P(A_n)$.

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{25}$.
   Rappel : pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose l'événement A_n "le salarié est absent pour cause de maladie la semaine n" et $p_n = P(A_n)$.
   On traduit formellement les données : $P_{A_n}(A_n) = 0$; $P_{\overline{A}_n}(A_{n+1}) = 0.04$; $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0.24$. On peut donc modéliser cette expérience par un arbre de probabilité pendant les semaines n et $n+1$:



   D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap \overline{A}_n) \\ &= P_{A_n}(A_{n+1}) \times P(A_n) + P_{\overline{A}_n}(A_{n+1}) \times P(\overline{A}_n) \\ &= 0.24pn + 0.04 \times (1 - p_n) = 0.20p_n + 0.04 = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{25} \end{aligned}$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $u_n = p_n - 120$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est suite géométrique, puis exprimer p_n en fonction de n et conclure.
   Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $u_n = p_n - \frac{1}{20}$. On a d'après la question 1.,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{20} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{25} - \frac{1}{20} = \frac{1}{5}p_n - \frac{1}{100} = \frac{1}{5}\left(p_n - \frac{1}{20}\right) = \frac{1}{5}u_n.$$

   d'où $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{5} = q$. Par conséquent $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ avec $u_1 = p_1 - \frac{1}{20} = -\frac{1}{20}$. On écrit ainsi

$$u_n = u_1 q^{n-1} = -\frac{1}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

   On trouve finalement l'expression de u_n :

$$p_n = u_n + \frac{1}{20} = \frac{1}{20} - \frac{1}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{20}\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right].$$

FYI : On a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} p_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{20}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right] = \frac{1}{20}$ car $|\frac{1}{5}| \leqslant 1$.

2 Variables aléatoires

Exercice n°7 Un appareil de jeu contient six boules blanches et trois boules rouges. Lorsqu'on introduit un jeton dans l'appareil, trois boules au hasard tombent dans un panier. Le prix d'un jeton est fixé à 8€. Si les trois boules obtenues sont rouges alors le joueur gagne 100€, si deux boules sont rouges alors il gagne 15€ et si une seule est rouge alors il gagne 5€. Soit X la variable aléatoire représentant le gain du joueur.

1. Déterminer la loi de X On tire au hasard 3 boules de l'appareil contenant 9 boules (6 BB et 3BR). Il y'a une combinaison de 3 parmi 9. On écrit

$$C_3^9 = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9\times 8\times 7\times 6!}{3\times 2\times 1\times 6!} = 3\times 4\times 7$$

On désigne par X la variable aléatoire associée au gain de ce jeu (le gain est algébrique, c'est-dire qu'il peut être négatif : c'est le cas quand le joueur perd de l'argent). Commençons par remarquer que $X(\Omega)$ peut prendre les valeurs suivantes : $X(\Omega) = \{-8; -3; 7; 92\}$. En effet, lors de lancers des 3 dès, on peut avoir les situations suivantes où le prix de jeton est 8€ :
— $100 - 8 = 92$€ (cas où on obtient trois boules rouges).
— $15 - 8 = 7$€ (cas où on obtient deux boules rouges).
— $5 - 8 = -3$€ (cas où on obtient une seule boule rouge).
— $0 - 8 = -8$€ (cas où on n'obtient pas de boules rouges).
Définition : On définit la loi de probabilité sur Ω en associant à chacun des éléments x_i de Ω sa probabilité élémentaire $p_i = P(X = x_i)$. En général, on résume la loi de probabilité sous forme d'un tableau composé de 2 lignes dont la 1ère représente les valeurs des x_i et la 2ème les probabilités élémentaires p_i.
On calcule maintenant les probabilités $p_i = P(X = x_i)$ pour les valeurs $X(\Omega) = \{-8; -3; 7; 92\}$. On a les situations suivantes :
— $P(X = -8)$ désigne la probabilité de ne pas obtenir de boules rouges ; $P(X = -8) = \frac{C_3^0\times C_6^3}{C_9^3} = \frac{20}{84}$.
— $P(X = -3)$ désigne la probabilité d'obtenir une seule boule rouge et deux boules blanches ; $P(X = -3) = \frac{C_3^1\times C_6^2}{C_9^3} = \frac{45}{84}$.
— $P(X = 7)$ désigne la probabilité d'obtenir deux boules rouges 6 et une boule blanche ; $P(X = 7) = \frac{C_3^2\times C_6^1}{C_9^3} = \frac{18}{84}$.
— $P(X = 92)$ désigne la probabilité d'obtenir trois boules rouges ; $P(X = 92) = \frac{C_3^3\times C_6^0}{C_9^3} = \frac{1}{84}$.
Par conséquent la loi de X est :

$X = x_i$€	-8	-3	7	92
$P(X = x_i)$	$\frac{20}{84}$	$\frac{45}{84}$	$\frac{18}{84}$	$\frac{1}{84}$

On vérifie facilement que la somme des probabilité vaut 1. ($\sum\limits_{i=1}^{4} P(X = x_i) = 1$).

2. Calculer $E(X)$, que peut-on en déduire ?
   On a par définition :
$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P(X = x_i) = -8\frac{20}{84} - 3 \times \frac{45}{84} + 7 \times \frac{18}{84} + 92 \times \frac{1}{84} = -\frac{11}{84} < 0.$$
   Ici, on a $E(X) < 0$, donc le jeu n'est pas équitable. Par conséquent le joueur perdra de l'argent s'il participera au jeu. **Remarque :** Si $E(X) > 0$ (resp. $E(X) < 0$)) alors le joueur gagnera (resp. perdra) de l'argent. Si $E(X) = 0$ alors le jeu est équitable.
3. Calculer $V(X)$.{On a par définition :
$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{4} x_i P(X = x_i) - [E(X)]^2 = (-8)^2\frac{20}{84} + (-3)^2 \times \frac{45}{84} + 6^2 \times \frac{18}{84} + 92^2 \times \frac{1}{84} - \frac{11}{84} \\ &= \frac{5477}{42} \approx 130.4048 \\ \sigma_X &= \sqrt{\frac{5477}{42}} \approx 11.42 \end{aligned}$$
   En interprétant l'écart-type $\sigma_X >>> 0$, on retrouver le résultat de la question 1., c'est-à-dire le joueur a un grand risque de perdre son argent s'il participe au jeu.

Exercice n°8 On vous propose un jeu qui s'effectue en lançant 3 dès dont les faces sont numérotés de 1 à 6. Pour y jouer, il faut verser 1€ Si on obtient trois 6 alors on reçoit 36€, si on obtient deux 6 alors on reçoit 7€ et si on obtient un 6 alors on reçoit 1€. Soit X la variable aléatoire représentant votre gain au jeu.

1. Déterminer la loi de X. Sachant que chaque partie du jeu coûte 1€, le joueur participe au jeu suivant :
   — si on obtient trois 6, alors le joueur gagne 36€.
   — si on obtient deux 6, alors le joueur reçoit 7€.
   — si on obtient un 6 alors le joueur gagne 1€.
   On désigne par X la variable aléatoire associée au gain de ce jeu. Commençons par remarquer que $X(\Omega)$ peut prendre les valeurs suivantes : $X(\Omega) = \{-1; 0; 6; 35\}$. En effet, lors de lancers des 3 dès, on peut avoir les situations suivantes :
   — $36 - 1 = 35$€ (cas où on obtient trois 6)..
   — $7 - 1 = 6$€ (cas où on obtient deux 6).
   — $1 - 1 = 0$€ (cas où on obtient un 6).
   — $0 - 1 = -1$€ (cas où on n'obtient pas 6).
   Lors de lancer des trois dès, on considère par exemple le triplet ordonné (dé 1, dé 2, dé 3). On a les résultats suivants :
   — $P(X = -1)$ désigne la probabilité de ne pas obtenir 6. Il existe donc un seul cas (a, b, c) tel que $a \neq 6$, $b \neq 6$ et $c \neq 6$. Donc $P(X = -1) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}\frac{5}{6} = \frac{125}{216}$.
   — $P(X = 0)$ désigne la probabilité d'obtenir un seul 6. Il existe donc trois cas $(6, b, c)$, $(a, 6, c)$, $(a, b, 6)$. Donc $P(X = 0) = 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}\frac{5}{6} = \frac{75}{216}$.
   — $P(X = 6)$ désigne la probabilité d'obtenir deux 6. Il existe donc trois cas $(6, 6, c)$, $(a, 6, 6)$, $(6, b, 6)$. Donc $P(X = 6) = 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}\frac{5}{6} = \frac{15}{216}$.
   — $P(X = 35)$ désigne la probabilité d'obtenir trois 6. Il existe donc un seul cas $(6, 6, 6)$. Donc $P(X = 35) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{1}{216}$.

Par conséquent la loi de X est :

$X = x_i$€	-1	0	6	35
$P(X = x_i)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

On vérifie facilement que $\sum_{i=1}^{4} P(X = x_i) = 1$.

Exercice similaire pour s'entraîner (une nouvelle re-formulation) : On considère l'expérience aléatoire suivante : on lance un dé non truqué 6 faces. Si on obtient le nombre "6", alors on a gagné, sinon on a perdu. On répète trois fois de manières indépendantes. A l'issue des trois lancers de dé, on compte le nombre total des succès (obtenir le nombre 6). Sachant que chaque partie du jeu coûte 1€, le joueur participe au jeu suivant :
— si on obtient trois 6, alors le joueur gagne 36€.
— si on obtient deux 6, alors le joueur reçoit 7€.
— si on obtient un 6 alors le joueur gagne 1€.
On désigne par X la variable aléatoire associée au gain de ce jeu (le gain est algébrique). Même question de l'exercice.

2. Le jeu est-il équitable ?
Pour répondre à cette question, on calcule l'espérance mathématique de X. On a

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P(X = x_i) = -1\frac{215}{216} + 0 \times \frac{75}{216} + 6 \times \frac{15}{216} + 35 \times \frac{1}{216} = -\frac{215}{216} + \frac{215}{216} = 0.$$

Donc le jeu est équitable.

Exercice n°9 Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher : 7 jetons sont blancs et les autres sont noirs. On tire simultanément deux jetons de ce sac. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de jetons blancs obtenus lors de ce tirage.

1. Déterminer la loi de X.
On désigne par X la variable aléatoire associée au nombre de jetons blancs obtenus lors de ce tirage. Alors $X(\Omega)$ peut prendre les valeurs suivantes : $0; 1; 2$. En effet, on a les situations suivantes :
— obtenir 0 jetons blancs (i.e. obtenir 2 jetons noirs).
— obtenir un seul jeton blanc (i.e. obtenir un jeton noir et un jeton blanc lors du tirage).
— obtenir deux jetons blancs.
On tire simultanément 2 jetons parmi 10. Donc, cette expérience est associée à un tirage simultanée, donc on utilise les combinaisons. Donc, le nombre de cas possibles est : $C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10\times9\times8}{2\times1\times8!} = 5 \times 9 = 45$. La loi de probabilité de X s'écrit ainsi

$X = x_i$€	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{3}{45}$	$\frac{C_7^1 \times C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{21}{45}$	$\frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{21}{45}$

On vérifie facilement que $\sum_{i=1}^{3} P(X = x_i) = 1$.

2. Calculer l'espérance et la variance de X.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i P(X = x_i) = 0 \times \frac{3}{45} + 1 \times \frac{21}{45} + 2 \times \frac{21}{45} = \frac{63}{45}.$$

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{3} x_i^2 P(X = x_i) - [E(X)]^2 = 0^2 \times \frac{3}{45} + 1^2 \times \frac{21}{45} + 2^2 \times \frac{21}{45} - \left(\frac{63}{45}\right)^2 \\ &= \frac{105}{45} - \left(\frac{63}{45}\right)^2 = \frac{28}{75} \end{aligned}$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{28}{75}} \approx 0.611 \quad \text{(écart-type)}.$$

3 Loi de probabilité

Exercice n°10 On lance un dé équilibré à 8 faces numérotés de 1 à 8. Soit X la variable aléatoire discrète correspondant au numéro obtenue lors d'un lancer. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

— **1ère méthode :** Soit X la variable aléatoire discrète associée au numéro obtenu lors d'un lancer. Alors, $X(\Omega)$ prend les valeurs suivantes : $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

$X = x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

— $E(X) = \sum_{i=1}^{8} x_i P(X = x_i) = \left(1 \times \frac{1}{8}\right) + \left(2 \times \frac{1}{8}\right) + \left(3 \times \frac{1}{8}\right) + \left(4 \times \frac{1}{8}\right) + \left(5 \times \frac{1}{8}\right) + \left(6 \times \frac{1}{8}\right) + \left(7 \times \frac{1}{8}\right) + \left(8 \times \frac{1}{8}\right) = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$.

— $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{8} x_i^2 P(X = x_i) - [E(X)]^2$. Or

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{8} x_i^2 P(X = x_i) &= \left(1^2 \times \frac{1}{8}\right) + \left(2^2 \times \frac{1}{8}\right) + \left(3^2 \times \frac{1}{8}\right) + \left(4^2 \times \frac{1}{8}\right) + \left(5^2 \times \frac{1}{8}\right) + \left(6^2 \times \frac{1}{8}\right) \\ &\quad + \left(7^2 \times \frac{1}{8}\right) + \left(8^2 \times \frac{1}{8}\right) \\ &= \frac{204}{8} \end{aligned}$$

Donc $V(X) = \frac{204}{8} - \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{204-162}{8} = \frac{42}{8} = \frac{21}{4}$

— **2ème méthode :** les événements sont équiprobables. Donc X suit une loi de probabilité discrète dite uniforme.

— $E(X) = \frac{n+1}{2}\frac{8+1}{2} = \frac{9}{2}$.

— $V(X) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{8^2-1}{12} = \frac{63}{12} = \frac{21}{4}$.

Exercice n°11 Un aéroport possède 10 avions. La probabilité qu'un avion ne décolle pas est de 0.01. On suppose que le fonctionnement d'un avion est indépendant de celui des autres. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'avions ne décollant pas parmi les 10 avions disponibles.

1. Déterminer la loi de X. Il s'agit d'une expérience aléatoire admettant exactement deux issues :
   — succès : "l'avion ne décolle pas" de probabilité $p = 0.01$.
   — échec : "l'avion décolle" de probabilité $q = 1 - p = 1 - 0.01 = 0.99$.
   Cette expérience aléatoire (EA) est une épreuve de Bernoulli. On répète cette EA 10 fois de manière indépendante (fonctionnement d'un avion est indépendant de celui des autres) : il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.
   La variable aléatoire X est égale au nombre d'avions qui ne décollent pas, c'est-à-dire au nombre de succès obtenus à l'issue de 10 épreuves de Bernoulli.
   Par conséquent, X suit la loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0.01$ et on note $X \sim \mathcal{B}(n = 10; p = 0.01)$ et
   $$P(X = k) = C_{10}^{k} 0.01^{k}(1 - 0.01)^{10-k},\ 0 \leqslant k \leqslant 10.$$

2. Calculer $P(X = 0)$ et $P(X = 2)$.On $X \sim \mathcal{B}(n = 10; p = 0.01)$, donc on a
   $$P(X = 0) = C_{0}^{10} 0.01^{0}(1 - 0.01)^{10} = 0.99^{10} \approx 0.9044,$$
   $$P(X = 2) = C_{2}^{10} 0.01^{2}(1 - 0.01)^{10-2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} 0.01^{2} \times 0.99^{8} = 45 \times 0.01^{2} \times 0.99^{8} \approx 0.0415.$$

3. Calculer la probabilité qu'il ait au plus deux avions qui ne décollent pas. En utilisant les résultats de la question 1., on a
   $$\begin{aligned} P(X \leqslant 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.99 + C_{10}^{1} \times 0.01^{1} \times (1 - 0.01)^{10-1} + 0.0415 \\ &= 0.9044 + 10 \times 0.01 \times 0.99^{9} + 0.0415 \approx 1.03 \end{aligned}$$
   Il existe un problème dans la formulation d'exercice ....Il faut modifier la probabilité qu'un avion ne décolle pas $p = 0.01$. En effet, $\sum_{k=0}^{10} P(X = k) = 1$, mais ici, on a déjà $P(X \leqslant 2) \approx 1$, impossible ! ! ! ! ! !

4. Calculer la probabilité qu'il ait au moins un avion qui décolle. En utilisant l'événement complémentaire, on a
   $$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.9044 = 0.01.$$

Exercice n°12 Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$. Une urne contient cinq boules blanches et quatre boules noires indiscernables au toucher. On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise.
Pour quelle valeur de n la probabilité d'obtenir au moins une boule noire sur les n tirages soit supérieur ou égale à 0.99 ?

— 1ère méthode : On rappelle que l'urne contient 9 boules dont 5 boules blanches et 4 boules noires.

  Posons $X(\Omega) = \mathbb{N}^{\star}$ car on peut obtenir la boule noire dès le premier tirage ou bien même se tromper $n - 1$ fois pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}^{\star}$ et trouver la boule noire au n-ième tirage. On a une épreuve : "tirer une boule noire" qui possède deux issues
  — un succès : "la boule est noire", de probabilité $\frac{4}{9}$.

— un échec : "la boule est blanche, de probabilité $\frac{5}{9}$.
On répète une infinité de fois $n \in \mathbb{N}^\star$ cette épreuve de manière indépendante. On désigne par X le numéro du premier succès (tirer boule noire). Donc, X suit la loi binomiale de paramètre n et de probabilité de succès $P(X=1) = \frac{4}{9}$ et on écrit la loi de X :

$$P(X=k) = C_n^k \left(\frac{4}{9}\right)^k \left(1-\frac{4}{9}\right)^{n-k} = C_n^k \left(\frac{4}{9}\right)^k \left(\frac{5}{9}\right)^{n-k}, \; 0 \leqslant k \leqslant n.$$

La probabilité d'obtenir au moins une boule noire est $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_n^0 \left(\frac{5}{9}\right)^n = 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n$. On souhaite déterminer la valeur de n telle que

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 1) \geqslant 0.99 &\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n \geqslant 0.99 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{5}{9}\right)^n \leqslant 1 - 0.99 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{5}{9}\right)^n \leqslant 0.01 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{5}{9}\right)^n \leqslant \ln(0.01) \\ &\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{5}{9}\right) \leqslant \ln(0.01) \end{aligned}$$

Comme $\ln\left(\frac{5}{9}\right) < 0$, alors $n \geqslant \frac{\ln(0.01)}{\ln\left(\frac{5}{9}\right)} \approx 7.83$. Comme $n \in \mathbb{N}^\star$, on prend la partie entière supérieure de 7.83, on a environ $n = 8$ pour que la probabilité d'obtenir au moins une boule noire.

— 2ème méthode : On rappelle que l'urne contient 9 boules dont 5 boules blanches et 4 boules noires.
Soit $\overline{D}$ l'événement "ne pas obtenir la boule noire au cours des n tirages"; on a donc $P(\overline{D}) = \left(\frac{5}{9}\right)^n$. Par conséquent, la probabilité d'obtenir au moins une boule noire sur les n tirages est :

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n.$$

On souhaite déterminer la valeur de n telle que

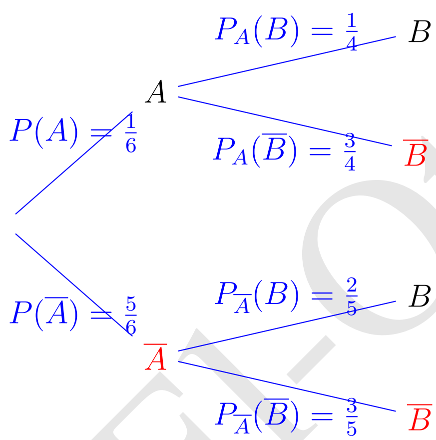
$$\begin{aligned} P(D) \geqslant 0.99 &\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n \geqslant 0.99 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{5}{9}\right)^n \leqslant 1 - 0.99 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{5}{9}\right)^n \leqslant 0.01 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{5}{9}\right)^n \leqslant \ln(0.01) \\ &\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{5}{9}\right) \leqslant \ln(0.01) \end{aligned}$$

Comme $\ln\left(\frac{5}{9}\right) < 0$, alors $n \geqslant \frac{\ln(0.01)}{\ln\left(\frac{5}{9}\right)} \approx 7.83$. Comme $n \in \mathbb{N}^\star$, on prend la partie entière supérieure de 7.83, on a besoin $n = 8$ tirages pour que la probabilité d'obtenir au moins une boule noire doit être supérieure ou égale à 0.99.

Exercice n°13 On dispose de deux urnes et d'un dé équilibré dont les faces sont numérotés de 1 à 6. L'urne U_1 contient trois boules rouges et une boule noire. L'urne U_2 contient trois boules rouges et deux boules noires.

Une partie se déroule de la façon suivante : Le joueur lance le dé s'il obtient 1 alors il tire une boule dans l'urne U_1 sinon il en tire une l'urne U_2. On convient qu'une partie est gagnée lorsque la boule obtenue est noire. Une personne joue dix parties indépendantes en remettent, après chaque partie, la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient.

1. Calculer la probabilité de gagner exactement trois parties.
   Posons A l'événement "obtenir le nombre 1" et B l'événement "obtenir une boule noire". Cette expérience aléatoire peut ainsi être décrite par un arbre de probabilité :



   On applique la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{24} + \frac{1}{3} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

   Soit X la variable aléatoire associée à la boule noire obtenue. Alors, la variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet, on a deux issues :
   — succès : "la boule obtenue est noire" de probabilité $p = \frac{3}{8}$.
   — échec : "la boule obtenue n'est pas noire" de probabilité $1 - p = \frac{5}{8}$
   On répète ce schéma 10 fois de manière identique et indépendante. par conséquent la variable X suit la loi binomiale de paramètre $n = 10$ et de probabilité $p = \frac{3}{8}$ et on écrit

$$P(X = k) = C_{10}^k \left(\frac{3}{8}\right)^k \left(1 - \frac{3}{8}\right)^{10-k} = C_{10}^k \left(\frac{3}{8}\right)^k \left(\frac{5}{8}\right)^{10-k}, \ 0 \leqslant k \leqslant 10$$

   En particulier, on a

$$\begin{aligned} P(X = 3) = C_{10}^3 \left(\frac{3}{8}\right)^3 \left(\frac{5}{8}\right)^{10-3} &= \frac{10!}{3!(10-3)!} \frac{3^3 \times 5^7}{8^3 \times 8^7} \\ &= \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} \frac{3^3 \times 5^7}{8^{10}} = 120 \times \frac{3^5 \times 5^7}{8^{10}} \approx 0.2357. \end{aligned}$$

   Ainsi, la probabilité de gagner exactement trois parties est environ 23.57%.

2. Calculer la probabilité de gagner au moins une partie.

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_{10}^{0}\left(\frac{3}{8}\right)^{0}\left(\frac{5}{8}\right)^{10-0} = 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^{10} \approx 0.9909.$$

Ainsi, la probabilité de gagner au moins une partie est environ 99.09%.

4 Couple de variables aléatoires

Résumé : Dans cette section, on considère X et Y deux variables aléatoires discrètes d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, et on fixera une numérotation de leurs ensembles images (avec $I = [1; n]$ ou $\mathbb{N}$ et $J = [1; m]$ ou $\mathbb{N}$ selon que X et Y soient finies ou non :

$$X(\Omega) = \{x_i, \quad i \in I\}; \quad Y(\Omega) = \{y_j, \quad j \in J\}.$$

— La loi du couple (X, Y) ou la loi conjointe de (X, Y) est déterminée par la donnée de

$$X(\Omega) = \{x_i, \quad i \in I\}; \quad Y(\Omega) = \{y_j, \quad j \in J\},$$
$$p_{i,j} = P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = P(X = x_i; Y = y_j), \quad \forall (i, j) \in I \times J.$$

Remarque :

— Cette loi est représentée généralement sous forme d'un tableau à double entrée.

— IMPORTANT : la somme de tous les termes du tableau à double entrée est égale à 1 ! !

— Pour un couple (X, Y) de variables aléatoires discrètes, les lois marginales de X et de Y sont données respectivement par (formule des probabilités totales ! !) :

$$\forall i, \quad P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$
$$\forall j, \quad P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

Remarque : Si la loi de (X, Y) est finie et représentée par un tableau, on obtient $P(X = x_i)$ en additionnant les termes de la i-ème ligne et $P(Y = y_j)$ en additionnant les termes de la j-ème colonne.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	Somme par ligne 1ère loi marginale $X \downarrow$
x_1	$P([X = x_1] \cap [Y = y_1])$	$P([X = x_1] \cap [Y = y_2])$	$\cdots$	$P([X = x_1] \cap [Y = y_n])$	$P(X = x_1)$
x_2	$P([X = x_2] \cap [Y = y_1])$	$P([X = x_2] \cap [Y = y_2])$	$\cdots$	$P([X = x_2] \cap [Y = y_n])$	$P(X = x_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	$P([X = x_m] \cap [Y = y_1])$	$P([X = x_m] \cap [Y = y_2])$	$\cdots$	$P([X = x_m] \cap [Y = y_n])$	$P(X = x_m)$
Somme par colonne 2ème loi marginale de $Y \longrightarrow$	$P(Y = y_1)$	$P(Y = y_2)$	$\cdots$	$P(Y = y_n)$	Total = 1

Notation : tout au long du document, on note $P(X = x_i, Y = y_j)$ à la place de $P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$.

Exercice n°14 Déterminer les lois marginales du couple de variables aléatoires (X, Y) défini par le tableau ci-dessous.

$X \backslash Y$	-1	0	1	2
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{8}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	0

— La loi marginale de X : en sommant la i-ème ligne, $i = 1, 2, 3$, on obtient

$$\begin{aligned}
P(X=1) &= P(X=1, Y=-1) + P(X=1, Y=0) + P(X=1, Y=1) + P(X=1, Y=2) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{16} = \frac{23}{48} \\
P(X=2) &= P(X=2, Y=-1) + P(X=2, Y=0) + P(X=2, Y=1) + P(X=2, Y=2) \\
&= \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{48} + \frac{1}{8} = \frac{11}{48} \\
P(X=3) &= P(X=3, Y=-1) + P(X=3, Y=0) + P(X=3, Y=1) + P(X=3, Y=2) \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + 0 = \frac{7}{24} = \frac{14}{48}
\end{aligned}$$

— La loi marginale de Y : en sommant la j-ème colonne, $j = 1, 2, 3, 4$, on obtient

$$\begin{aligned}
P(Y=-1) &= P(X=1, Y=-1) + P(X=2, Y=-1) + P(X=3, Y=-1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \\
P(Y=0) &= P(X=1, Y=0) + P(X=2, Y=0) + P(X=3, Y=0) = \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \\
P(Y=1) &= P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=1) + P(X=3, Y=1) = 0 + \frac{1}{48} + \frac{1}{24} = \frac{3}{48} \\
P(Y=2) &= P(X=1, Y=2) + P(X=2, Y=2) + P(X=3, Y=2) = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + 0 = \frac{3}{16}
\end{aligned}$$

Remarque : on peut calculer directement ces lois à partir du tableau à double entrée :

$X \backslash Y$	-1	0	1	2	Loi marginale de $X \downarrow$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{16}$	$P(X=1) = \frac{23}{48}$
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{8}$	$P(X=2) = \frac{11}{48}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	0	$P(X=3) = \frac{14}{48}$
Loi marginale de $Y \longrightarrow$	$P(Y=-1) = \frac{1}{2}$	$P(Y=0) = \frac{1}{4}$	$P(Y=1) = \frac{1}{16}$	$P(Y=2) = \frac{3}{16}$	$\sum_{i,j} P(X = x_i, Y = y_j) = 1$

Exercice n°15 On choisit au hasard deux nombres dans $-1, 1$. On note X leur somme et Y leur produit.

1. Déterminer la loi conjointe du couple de variables aléatoires (X, Y). D'après l'énoncé, X est la variable aléatoire associée à la somme de deux nombres choisis au hasard et Y la variable associée

à leur produits. Commençons par remarquer que l'univers est $\Omega = \{-1, 1\}^2$, que X prend les valeurs dans $\{-2, 0, 2\}$ et Y dans $\{-1, 1\}$. La loi conjointe du couple (X, Y) est :

$P(X = 2, Y = 1) = P(X = 2)P_{X=2}(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (car $1 + 1 = 2$ et $1 \times 1 = 1$)
$P(X = 2, Y = -1) = P(X = 2)P_{X=2}P(Y = -1) = 0$ (car : $1 + 1 = 2$ mais $1 \times 1 = 1 \neq -1$)
$P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0)P_{X=0}P(Y = 1) = 0$ (car : $-1 + 1 = 0$ mais $-1 \times 1 = -1 \neq 1$)
$P(X = 0, Y = -1) = \frac{1}{2}$ (car : $-1 + 1 = 0$ et $-1 \times 1 = -1$)
$P(X = -2, Y = 1) = P(X = -2)P_{X=-2}P(Y = 11) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (car : $-1 + (-1) = 2$ et $-1 \times (-1) =$
$P(X = -2, Y = -1) = P(X = -2)P_{X=-2}P(Y = -1) = 0$ (car : $-1 + (-1) = 2$ et $-1 \times (-1) \neq 1$)

Donc, on résume cette loi par un tableau à double entrée :

X \ Y	-1	1
-2	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{2}$	0
2	0	$\frac{1}{4}$

Important : on vérifie bien que la somme de tous les termes du tableau est égale à 1.

2. Déterminer les lois marginales du couple de variables aléatoires (X, Y).

— La loi marginale de X : en utilisant le tableau ci-dessus et en sommant les termes de la 1ère ligne, on arrive

$$P(X = -2) = P(X = -2, Y = -1) + P(X = -2, Y = 1) = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

En sommant respectivement la 2ème ligne et la 3ème ligne, on obtient

$$P(X = 0) = P(X = 0, Y = -1) + P(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2},$$
$$P(X = 2) = P(X = 2, Y = -1) + P(X = 2, Y = 1) = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

On a ainsi obtenu la loi marginale de X et on vérifie bien que $P(X = -2) + P(X = 0) + P(X = 2) = 1$.

—

— La loi marginale de X : en utilisant le tableau ci-dessus et en sommant les termes de la 1ère colonne on arrive

$$P(Y = -1) = P(X = -2, Y = -1) + P(X = 0, Y = -1) + P(X = 2, Y = -1) = 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

En sommant respectivement la 2ème colonne on obtient

$$P(Y = 1) = P(X = -2, Y = 1) + P(X = 0, Y = 1) + P(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

On a ainsi obtenu la loi marginale de Y et on vérifie bien que $P(Y = -1) + P(X = 1) = 1$.

Exercice n°16 Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $a \in \mathbb{R}^+$. On considère le couple des variables aléatoires (X, Y) tel que $X(\Omega) = Y(\Omega) = [1; n]$ et $\forall i \in X(\Omega), \forall j \in Y(\Omega)$, $P(X = i, Y = j) = a \times i \times j$

1. Déterminer la valeur de a.
   Soit a une valeur réelle positive. On a par définition

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} P(X=i,Y=j) = 1 &\iff \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} aij = 1\\ &\iff a \sum_{1\leqslant i\leqslant n} i \sum_{1\leqslant j\leqslant n} j = 1 \iff a\frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} = 1\\ &\iff a = \frac{4}{n^2(n+1)^2}.\end{aligned}$$

2. Déterminer les lois marginales du couple de variables aléatoires (X, Y).
   Pour $i \in [1; n]$, on a

$$\begin{aligned}p_i = P(X=i) &= \sum_{1\leqslant j\leqslant n} P(X=i,Y=j) = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} aij = ai \sum_{1\leqslant j\leqslant n} j\\ &= i \times \frac{4}{n^2(n+1)^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2}{n(n+1)}i\end{aligned}$$

   On en déduit que X suit une loi arithmétique de paramètre $\frac{2}{n(n+1)}$. De même, on en déduit que Y suit une loi arithmétique de paramètre $\frac{2}{n(n+1)}$. En effet, pour $j \in [1; n]$ on a :

$$\begin{aligned}p_j = P(Y=j) &= \sum_{1\leqslant i\leqslant n} P(X=i,Y=j) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} aij = aj \sum_{1\leqslant i\leqslant n} i\\ &= j \times \frac{4}{n^2(n+1)^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2}{n(n+1)}j\end{aligned}$$

3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$. Puisque $X(\Omega)$ est un ensemble fini, alors l'espérance de X et la variance de X existent et on écrit ainsi

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} iP(X=i) = \sum_{i=1}^{n} i\frac{2i}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2}{n(n+1)}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3}.$$

   et

$$\begin{aligned}V(X) &= \sum_{i=1}^{n} i^2 P(X=i) - [E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} i\frac{2i}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i^3 - \left(\frac{2n+1}{3}\right)^2\\ &= \frac{2}{n(n+1)}\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{(2n+1)^2}{9} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(2n+1)^2}{9}.\end{aligned}$$