Aéro 3 — Ma 322 (2021-2022)
Projet — Résolution numérique d'équations différentielles
Étude du pendule simple

Ce projet est à rendre individuellement le 10 avril 2022 via Moodle. Il est impératif de rendre tout le code Python utilisé pour réaliser le projet (sous forme de fichiers Python) ainsi qu'un rapport au format PDF (aucun autre format ne sera accepté pour le rapport).

La programmation des méthodes demandées dans la première partie devrait être traité au cours de la séance de TP 2. La séance de TP 3 sera une séance d'interrogation de TP qui portera sur l'ensemble du module (intégration numérique et résolution des équations différentielles). Il est absolument nécessaire d'avoir traité au préalable le TP1 et la première partie du projet et d'avoir les codes à disposition pour aborder cette interrogation de TP.

Au cours de la séance de projet, une question supplémentaire sur le projet ou une thématique proche sera posée. Cette question sera à traiter au cours de la séance de projet et à rendre immédiatement, séparèment du rendu du projet. Le traitement de cette question constituera 7 points dans la note totale du projet, le rendu final le sera sur 13 points.

1 Méthodes numériques de résolution d'équations différentielles

Question 1.1

Écrire une fonction qui code la méthode d'Euler explicite pour résoudre une équation différentielle.

Cette fonction `EulerExplicite(F,a,b,y0,N)` prendra comme arguments :

— F la fonction décrivant un problème de Cauchy $y' = F(t, y)$.

— a et b les bornes de t.

— y_0 la valeur posée pour $y(a)$ dans la condition initiale (fourni sous la forme d'un simple nombre ou d'un vecteur unidimensionnel).

— N le nombre de subdivisions, qui détermine le pas $h = \dfrac{b-a}{N}$.

La fonction rendra :

— t contenant (sous forme d'une `array` unidimensionnelle) les valeurs t_0 à t_N de la subdivision de l'intervalle $[a, b]$.

— Y contenant les valeurs y_n calculées. Y sera une `array` à deux dimensions, contenant $N + 1$ colonnes et p lignes. La première colonne correspond donc à y_0, la suivante à y_1 et ainsi de suite.

Question 1.2

Expérimenter la fonction écrite pour résoudre les problèmes de Cauchy suivants. Ces problèmes sont simples et la solution explicite est connue et fournie. À chaque fois, on représentera graphiquement la solution numérique calculée et la solution exacte fournie. On choisira $N = 100$.

1. $y' = -y + t$ avec $y(0) = 0$. La solution est $y(t) = t - 1 + e^{-t}$. On résoudra sur l'intervalle $[0, 2]$.
2. $y'' + y = t$ avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. La solution est $y = t - \sin t$. On résoudra sur $[0, 5]$.
3. $y' = y + y^2$ avec la condition initiale $y(0) = 1$. La solution est $y(t) = \dfrac{e^t}{2 - e^t}$. On résoudra sur $[0, \frac{1}{2}]$.

Question 1.3

Programmer les méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2 et 4 (on écrira des fonctions `RK2` et `RK4` avec les mêmes entrées et sorties que `EulerExplicite`).

Les tester sur quelques problèmes de la question précédente.

Question 1.4

Résoudre au moins une des équations et systèmes rencontrés dans les TD sur les équations différentielles (ex 3 et 4 du TD3, ex 3 du TD4), en choisissant au besoin des conditions initiales et un intervalle $[a, b]$.

On pourra comparer avec les résultats obtenus avec la fonction `solve_ivp` du module `scipy.integrate`.

2 Problème du pendule simple

L'étude du mouvement d'un pendule simple sans frottements amène à l'étude de la résolution de l'équation différentielle suivante, non linéaire.

$$L\theta''(t) = -g \sin \theta(t)$$

L désignant la longueur du pendule, g l'accélération due à la pesanteur, $\theta(t)$ étant l'angle constitué par le pendule et la verticale.
La solution de cette équation différentielle ne peut pas être exprimée à l'aide des fonctions usuelles.
Dans le cas des petites oscillations, on peut approcher l'équation par $L\theta''(t) = -g\theta(t)$, équation linéarisée, qui a des solutions de la forme $\theta(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ avec $\omega^2 = \frac{g}{L}$.
Dans ce projet, on va résoudre numériquement l'équation non linéarisée.
On prendra $g = 9,81$ m/s^2 et $L = 1$ m.
Les conditions initiales considérées seront, sauf mention contraire, $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ et $\theta'(0) = 0$. On se limitera à des calculs dans $t \in [0, 8]$.

Question 2.1

Résoudre le problème du pendule avec $h = 0,04$ avec les trois méthodes codées. Représenter graphiquement $\theta(t)$ en fonction de t sur l'intervalle considéré. Les résultats obtenus semblent-ils pertinents ? Essayer avec différents pas de discrétisation et commenter.

Question 2.2

On va expérimenter le bienfondé de l'approximation des petites oscillations.

1. On pose la condition initiale $\theta(0) = 10^{-5}$ et $\theta'(0) = 0$. Comparer la solution calculée numériquement et la solution explicite obtenue grâce à la résolution de l'équation linéarisée.
2. On revient à la condition initiale $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ et $\theta'(0) = 0$. Effectuer la même comparaison. Relever la valeur de la période du mouvement et comparer avec celle calculée avec l'équation linéarisée.
3. On peut démontrer que la période du mouvement du pendule simple avec une condition initiale $\theta(0) = \theta_0 \in [0, \pi[$ et $\theta'(0) = 0$ est donnée par le calcul de l'intégrale suivante

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{avec} \quad k = \sin \frac{\theta_0}{2}$$

   (a) Vérifier que pour θ_0 petit, cette formule donne bien la période calculée avec l'équation linéarisée (que l'on notera T_0).

   (b) Calculer numériquement cette période lorsque $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ à l'aide de cette formule (et en se servant du code écrit lors du TP portant sur l'intégration numérique). Comparer avec la valeur précédemment relevée.

   (c) Représenter graphiquement l'évolution de $\frac{T}{T_0}$ en fonction de θ_0. Pour quelle valeur de θ_0 a-t-on $T = 2T_0$? Représenter $\theta(t)$ pour ce cas de figure.

Question 2.3

On veut mesurer l'erreur de calcul dans la résolution numérique de l'équation différentielle avec les différentes méthodes. Établir une représentation graphique de ces erreurs en fonction de N. On pourra s'intéresser aussi à l'erreur quand on travaille sur un autre intervalle de temps $[0, T]$.