Exercise n°1. Soit le système :

$$\begin{cases} 2x + 5y + 6z = 7 \\ 4x + 11y + 9z = 12 \\ -2x - 8y + 7z = 3 \end{cases}$$

1. Présenter ce système sous la forme matricielle $AX = B$.
   Le système ci-dessus est décrit par les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 11 & 9 \\ -2 & -8 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   ou par la matrice augmentée : $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 11 & 9 & 12 \\ -2 & -8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Résoudre le système $AX = B$.
   Nous allons appliquer le Pivot de Gauss en faisant les opérations suivantes sur les lignes $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 + L_1$

$$\begin{cases} 2x + 5y + 6z = 7 \\ 4x + 11y + 9z = 12 \\ -2x - 8y + 7z = 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y + 6z = 7 \\ y - 3z = -2 \\ -3y + z = -4 \end{cases}$$

   On fait maintenant $L_3 \longleftarrow L_3 + 3L_2$ pour obtenir :

$$\begin{cases} 2x + 5y + 6z = 7 \\ y - 3z = -2 \\ -8z = -10 \end{cases}$$

   En partant de la dernière ligne on trouve $z = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$, puis en remontant $y = \frac{7}{4}$, puis $x = -\frac{37}{8}$. Par conséquent l'lunique solution de ce système est $\left(-\frac{37}{8}, \frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right)$. On n'oublie pas de vérifier que c'est une solution du système initial.

Exercise n°2. Résoudre avec la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x + 4y - 3z + 2t = 1 \\ -x - y \quad - 3t = 2 \\ x - y + 4z + 9t = -8 \end{cases}$$

Le système ci-dessus est décrit par les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

ou par la matrice augmentée : $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 9 & -8 \end{pmatrix}$.

On applique les opérations suivantes $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \longleftarrow L_3 + L_1$ et $L_4 \longleftarrow L_4 - L_1$ sur la matrice augmentée $\tilde{A}$ (ou A et B) pour obtenir un système équivalent :

$$\tilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 8 & -9 \end{pmatrix}.$$

On fait maintenant $L_4 \longleftarrow L_4 + L_2$, on aboutit à :

$$\tilde{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & -10 \end{pmatrix}.$$

Puis, on fait $L_4 \longleftarrow L_4 + 2L_3$, ce qui donne un système contenant une matrice triangulaire et un second membre :

$$\tilde{A}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ce système s'écrit ainsi

$$\begin{cases} x + \ y + \ z + \ t = 1 \\ \quad 2y - 5z \qquad = -1 \\ \qquad\quad z - 2t = 3 \\ \qquad\qquad 4t = -4 \end{cases}$$

En partant de la fin on en déduit $t = -1$, puis en remontant cela donne

$$\begin{cases} x \qquad\quad = -1 \\ \quad y \qquad = 2 \\ \qquad z = 1 \end{cases}$$

Conclusion : l'unique solution du système est $(-1, 2, 1, -1)$. On n'oublie pas de vérifier que c'est une solution du système initial.

Remarque : il est très important de réordonner le système avant d'appliquer le pivot de Gauss pour minimiser le coût de calcul et le nombre d'opérations. En effet, on réordonne les variables dans l'ordre : z, x, y, t pour profiter des lignes de ?ja ? simples et on a

$$\begin{cases} z + \ x + \ y + \ t = 1 \\ -3z + 2x + 4y + 2t = 1 \\ \quad - \ x - \ y - 3t = 2 \\ 4z + \ x - \ y + 9t = -8 \end{cases}$$

Exercise n°3. Déterminer la décomposition LU de la matrice :$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

On définit à chaque étape le pivot de Gauss p_i, puis on calcule les coefficients g_{ij} et on appliqueles opérations sur les lignes de la matrice A.

1. On a $p_1 = 1$ et les coefficients $g_{21} = \frac{2}{1} = 2, g_{31} = \frac{-1}{2} = -1$ et $g_{41} = \frac{1}{1} = 1$. On applique maintenant les opérations $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \longleftarrow L_3 + L_1$ et $L_4 \longleftarrow L_4 - L_1$ sur la matrice A :
$$\tilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$
2. On a $p_2 = 2$ et $g_{32} = \frac{0}{2} = 0$, $g_{42} = \frac{-2}{2} = -1$.Par application de $L_4 \longleftarrow L_4 + L_2$, on obtient :
$$\tilde{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$
3. On a $p_3 = 1$ et $g_{43} = \frac{-2}{1} = -2$. On fait $L_4 \longleftarrow L_4 + 2L_3$, ce qui donne une matrice triangulaire supérieure que l'on notera U :
$$\tilde{A}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} := U.$$
Quand à L, c'est la matrice qui reprend sous la diagonale les valeurs de g_{ij} , c ?est-à-dire ici :
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercise n°4.

1. Déterminer la décomposition LU de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ -3 & -4 & 4 & -2 \\ 6 & 2 & 2 & 7 \\ 9 & 4 & 2 & 18 \end{pmatrix}$.

   On définit à chaque étape le pivot de Gauss p_i, puis on calcule les coefficients g_{ij} et on appliqueles opérations sur les lignes de la matrice A.

   (a) On a $p_1 = 3$ et les coefficients $g_{21} = \frac{-3}{3} = -1, g_{31} = \frac{6}{3} = 2$ et $g_{41} = \frac{9}{3} = 3$. On applique maintenant les opérations $L_2 \longleftarrow L_2 + L_1$, $L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1$ et $L_4 \longleftarrow L_4 - 3L_1$ sur la matrice A :
   $$\tilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

(b) On a $p_2 = -2$ et $g_{32} = \frac{-2}{-2} = 1$, $g_{42} = \frac{-2}{-2} = 1$.Par application de $L_3 \longleftarrow L_3 - L_2$ et $L_4 \longleftarrow L_4 - L_2$, on obtient :

$$\tilde{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(c) On a $p_3 = 1$ et $g_{43} = \frac{2}{1} = 1$. On fait $L_4 \longleftarrow L_4 - L_3$, ce qui donne une matrice triangulaire supérieure que l'on notera U :

$$\tilde{A}^{(4)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} := U.$$

Quand à L, c'est la matrice qui reprend sous la diagonale les valeurs de g_{ij} , c ?est-à-dire ici :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. En utilisant la décomposition LU de A, résoudre le système $AX = B$ où $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix}$.

Comme $A = LU$, on résoud $LY = B$ puis $UX = Y$ Le système $LY = B$ s'écrit :

$$\begin{cases} y_1 & = 4 \\ -y_1 + y_2 & = -5 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 & = -2 \\ 3y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 = 13 \end{cases}$$

En partant du début (méthode par descente), on en déduit $y_1 = 4, y_2 = -1, y_3 = -9, y_4 = 20$.
On résout maintenant le système $UX = Y$ qui s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 & = 4 \\ -2x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = -1 \\ x_3 - 3x_4 & = -9 \\ 10x_4 & = 20 \end{cases}$$

et qui se résoud par remontéee : $x_4 = 2$, d'où $x_3 = -3$, puis $x_2 = -2$ et enfin $x_1 = -1$.

Conclusion : l'unique solution du système est $(-1, -2, -3, 2)$. On n'oublie pas de vérifier que c'est une solution du système initial.

Exercise n°5. Déterminer la décomposition LU de la matrice :$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Donnons les matrices successives de la méthode de Gauss pour déterminer la décomposition LU en définisant le $i^{\text{ème}}$ pivot par p_i à chaque étape de résolution :

1. On a $p_1 = 1$ et les coefficients $g_{21} = \frac{2}{1} = 2$, $g_{31} = \frac{0}{1} = 0$, $g_{41} = \frac{0}{1} = 0$ et $g_{51} = \frac{0}{1} = 0$. On applique maintenant $L_2 \longleftarrow L_2 + L_1$ sur la matrice A :

$$\tilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On a $p_2 = -1$ et on a $g_{32} = \frac{2}{-1} = -2$, $g_{42} = \frac{0}{-1} = 0$ et $g_{52} = \frac{0}{-1} = 0$.Par application de $L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_2$, on obtient :

$$\tilde{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. On a $p_3 = 3$ et $g_{43} = \frac{2}{3}$. En utilisant $L_4 \longleftarrow L_4 - \frac{2}{3}L_3$, on obtient

$$\tilde{A}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. $p_4 = \frac{1}{3}$ et on a $g_{54} = 6$. On fait, ce qui donne une matrice triangulaire supérieure que l'on notera U :

$$\tilde{A}^{(5)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} := U.$$

Quand à L, c'est la matrice qui reprend sous la diagonale les valeurs de g_{ij} , c ?est-à-dire ici :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, la décomposition LU est

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

En déduire la solution du système $AX = B$ où $B = (5, 0, 0, -5, -5)^T$.

Résoudre le système $AX = B$ revient à résoudre $LUX = B$. En posant $Y = UX$, on a donc à résoudre $LY = B$ avec Y comme inconnue, puis $UX = Y$. Ces deux systèmes sont triangulaires.

LY = B donne immédiatement :

$$\begin{cases} y_1 & = 5 \\ y_2 & = 0 - 2y_1 = -10 \\ y_3 & = 0 + 2y_2 = 20 \\ y_4 & = -5 - \frac{2}{3}y_3 = \frac{25}{3} \\ y_5 & = -5 - 6y_4 = -55 \end{cases}$$

Quand à $UX = Y$, la résolution donne :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 5 \\ -x_2 + x_3 & = -10 \\ 3x_3 + x_4 & = -20 \\ 3x_4 + x_5 & = \frac{25}{3} \\ -5x_5 & = -55 \end{cases}$$

Soit ainsi l'unique solution du système

$$\begin{cases} x_1 & = -1 \\ x_2 & = 6 \\ x_3 & = -4 \\ x_4 & = -8 \\ x_5 & = -11 \end{cases}$$

Exercise n°6. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n > 2$, on considère la matrice carrée de dimension n définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est inversible et déterminer, le cas échéant, sa décomposition LU.

Pour montrer que la matrice A est inversible, on essaie de trouver sa décomposition LU et on montre que le déterminant de cette décomposition. est non nul. Pour se faire, on utilise la méthode de pivot de Gauss :

1. On a $p_1 = 2$ et $g_{21} = -\frac{1}{2}$, avec $g_{i1} = 0$ pour$i \geqslant 3$. On obient (le calcul n'affectant que la deuxième ligne). On obtient

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. On a $p_2 = \frac{3}{2}$ et $g_{32} = -\frac{2}{3}$. On obtient

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. On a $p_3 = \frac{4}{3}$ et $g_{43} = -\frac{3}{4}$.
Au vu de ces premières étapes, on est amené à penser que le k^{ieme} pivot est $\frac{k+1}{k}$, que $g_{(k+1),k} = \frac{-k}{k+1}$, et que

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k+1}{k} & -1 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour le prouver, on raisonne par récurrence, en supposant que cela est vrai à l'étape (k). A l'étape ultérieure, on aura donc, comme $2 - (-1)\left(-\frac{k}{k+1}\right) = \frac{k+2}{k+1}$, à nouveau cette forme et la valeur attendue du pivot.

$$A^{(\mathrm{k+1})} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k+1}{k} & -1 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k+2}{k+1} & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par construction, on obtient donc une décomposition LU avec

$$U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k+1}{k} & -1 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k+2}{k+1} & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{n-1}{n} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \frac{n+1}{n} \end{pmatrix}$$

et

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \ddots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & \ddots & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{k+1} & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{n-2}{n} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{n-1}{n} & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\det A = \det(LU) = \det L \times \det U = \det U = n+1 \neq 0$, donc A est une matrice inversible.