MA 223 - ANALYSE NUMÉRIQUE
TD2 : DÉCOMPOSION DE CHOLESKY
———-
Enseignant : H. El-Otmany

Aero. 3
Semestre : 2
A.U. : 2022-2023

Exercise n°1.

1. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 10 & 5 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la décomposition de Cholesky de A, que l'on notera $A = LL^\top$. Il suffit d'appliquer les formules (on note l_{ij} les coefficients de L et a_{ij} ceux de A) :

— Calcul des termes diagonaux : $l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

— Calcul des termes non diagonaux : $l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj}}{l_{kk}}$ pour $i > k$.

Par un calcul successive, on obtient :

$$\begin{aligned}
l_{1,1} &= \sqrt{a_{1,1}} = \sqrt{4} = 2 \\
l_{2,1} &= \frac{a_{2,1}}{l_{1,1}} = \frac{-2}{2} = -1 \\
l_{3,1} &= \frac{a_{3,1}}{l_{1,1}} = \frac{-4}{2} = -2 \\
l_{2,2} &= \sqrt{a_{2,2} - l_{2,1}^2} = \sqrt{10 - (-1)^2} = \sqrt{9} = 3 \\
l_{3,2} &= \frac{a_{3,2} - l_{3,1} l_{2,1}}{l_{2,2}} = 1 \\
l_{3,3} &= \sqrt{a_{3,3} - \left(l_{3,1}^2 + l_{3,2}^2\right)} = 1
\end{aligned}$$

Par conséquent, la matrice L s'écrit comme suit :

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calculer le déterminant de A.D'après la question 1., on a $A = LL^\top$. Par application du déterminant, on obtient $\det A = \det(L) \times \det\left(L^\top\right) = (\det(L))^2$. Comme L est triangulaire, on a $\det L = 2 \times 3 \times 1 = 6$ (multiplication des valeurs diagonales). Par conséquent $\det A = 36$.

3. Résoudre le système $AX = B$ où $B = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ -7 \end{pmatrix}$. Résoudre le système $AX = B$ revient à résoudre $LL^\top X = B$ en utilisant la dcomposition de Cholesky. Pour ce faire, on pose $Y = L^\top X$ et on

résoud d'abord $LY = b$ où $Y = (y_1, y_2, y_3)^T$. Le système $LY = B$ est triangulaire et s'écrit ainsi :

$$\begin{cases} 2y_1 & = 6 \\ -y_1 + 3y_2 & = -9 \\ -2y_1 + y_2 + y_3 & = -7 \end{cases}.$$

Par la méthode descente, on calcule y_1 via la 1ère équation : $y_1 = \frac{6}{3} = 2$, puis on injecte cette valeur dans la 2ème Eq., on obtient $y_2 = -2$. En remplaçant les valeurs de y_1 et y_2 dans la 3ème équation, on arrive à $y_3 = 1$.

Pour obtenir la solution de $AX = B$, on résoud le système $L^\top X = B$, c'est-à-dire le système triangulaire :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \\ \qquad 3x_2 + x_3 = -2 \\ \qquad\qquad x_3 = 1 \end{cases}$$

que l'on résoud par remontée : $x_3 = 1, x_2 = -1$ et $x_1 = 2$. Par conséquent, la solution de $AX = B$ est $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercise n°2. Soit la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 24 \end{pmatrix}.$$

Effectuer la décomposition de Cholesky de A. En déduire le déterminant de A.Il est clair que la matrice A est symétrique car $A^T = A$. Par application des formules présentées dans l'exercice 1. , on obtient

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

et donc $\det(A) = (\det(L))^2 = 16$.

Exercise n°3. Pour quelles valeurs du réel x la matrice suivante est définie positive ? Déterminer la décomposition de Cholesky le cas échéant.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

A est clairement symétrique. Elle ne sera définie positive que dans le cas où la décomposition de Cholesky est possible, avec L inversible. Tentons d'apppliquer l'algorithme de décomposition de Cholesky.

$$l_{11} = \sqrt{1}, \quad l_{21} = \frac{1}{1} = 1, l_{31} = 1, \quad l_{22} = \sqrt{x - 1^2}.$$

La matrice L sera inversible et que son diagonale l_{22} est définie si et seulement si $x > 1$.

$$l_{32} = \frac{1-1}{l_{22}} = 0.$$
$$l_{33} = \sqrt{x - 1^2 - 0^2} = \sqrt{x - 1}.$$

Par conséquent A est définie positive si et seulement si $x > 1$ et on a

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{x-1} & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{x-1} \end{pmatrix}$$

Exercise n°4. On considère une matrice dite tridiagonale symétrique de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Montrer que si A admet une décomposition de Cholesky $A = LL^\top$, alors L a la forme

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & \alpha_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Donner les formules permettant de calculer les coefficients α_i et β_i.

— Il est clair que la matrice A est symméstrique. En effet, les valeurs sous et sur-diagonales sont les mêmes d'où $A^T = A$.

— Supposons que la matrice A est définie positive et essayons de trouver sa décomposition de Cholesky en utilisant les formules présentées dans l'exercice 1.

On a d'abord $l_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}} = \sqrt{a_1} := \alpha_1$. Puis $l_{2,1} = \frac{a_{2,1}}{l_{1,1}} = \frac{b_1}{l_{1,1}} := \beta_1$. Pour $i \geqslant 3$, on a $a_{i,1} = 0$ et donc

$$l_{i,1} = \frac{a_{i,1}}{l_{1,1}} = 0$$

La première colonne de L est bien de la forme annoncée. Continuons de proche en proche. On suppose que les $k-1$ premières colonnes sont de la forme annoncées et calculons la colonne k. On aura donc $l_{k,k} = \sqrt{a_{k,k} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{k,j}^2}$. Or $l_{k,j} = 0$ lorsque $j < k-1$. On a donc $l_{k,k} = \sqrt{a_k - l_{k,k-1}^2}$ Puis $l_{k+1,k} = \frac{a_{k+1,k} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{k,j} l_{k+1,j}}{l_{k,k}} = \frac{b_k}{l_{k,k}}$. (En effet $l_{k+1,j} = 0$ pour $j < k$. Enfin pour $i > k+1$, on a

$$l_{i,k} = \frac{a_{i,k} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{k,j} l_{i,j}}{l_{k,k}} = 0$$

puisque $a_{i,k} = 0$ et $l_{i,j} = 0$ pour $j \leqslant k-1 < i-1$. On a donc la forme voulue. En adoptant la notation proposée pour les coefficients de L, on obtient donc les formules suivantes :

— $\alpha_1 = \sqrt{a_1}$.

— $\beta_k = \frac{b_k}{\alpha_k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

— $\alpha_k = \sqrt{a_k - \beta_{k-1}^2}$ pour $2 \leqslant k \leqslant n$.

Remarque : le calcul doit être effectuer dans l'ordre suivant : $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, \alpha_n$.