Aéro 3 — Ma 322 (2022-2023)
TP2 — Résolution numérique d'équations différentielles

Question 1

Écrire une fonction qui code la méthode d'Euler explicite pour résoudre une équation différentielle. Cette fonction `EulerExplicite(F,a,b,y0,N)` prendra comme arguments :

- F la fonction décrivant un problème de Cauchy $y' = F(t, y)$.
- a et b les bornes de t.
- y_0 la valeur posée pour $y(a)$ dans la condition initiale (fourni sous la forme d'un simple nombre ou d'un vecteur unidimensionnel).
- N le nombre de subdivisions, qui détermine le pas $h = \dfrac{b-a}{N}$.

La fonction rendra :

- t contenant (sous forme d'une `array` unidimensionnelle) les valeurs t_0 à t_N de la subdivision de l'intervalle $[a, b]$.
- Y contenant les valeurs y_n calculées. Y sera une `array` à deux dimensions, contenant $N + 1$ colonnes et p lignes. La première colonne correspond donc à y_0, la suivante à y_1 et ainsi de suite.

Pour coder le schéma d'Euler explicite, nous rappelons la méthode pour le problème de Cauchy $y' = F(t, y)$. Posons $y_n \approx y(t_n)$ et désignons par t_n les noeuds de subdivisions de l'intervalle I tels que $t_n = t_0 + nh$ où h est le pas de discrétisation. Par application de la formule des rectangles à Gauche, nous avons

$$y_{n+1} = y_n + hF(t_n, y_n)$$

Question 2

Expérimenter la fonction écrite pour résoudre les problèmes de Cauchy suivants. Ces problèmes sont simples et la solution explicite est connue et fournie. À chaque fois, on représentera graphiquement la solution numérique calculée et la solution exacte fournie. On choisira $N = 100$.

1. $y' = -y + t$ avec $y(0) = 0$. La solution est $y(t) = t - 1 + e^{-t}$. On résoudra sur l'intervalle $[0, 2]$.
2. $y'' + y = t$ avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. La solution est $y = t - \sin t$. On résoudra sur $[0, 5]$. Posons $Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$ et $Y'(t) = \begin{bmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{bmatrix}$ donc $F(t, Y(t)) = \begin{bmatrix} y' \\ t - y \end{bmatrix}$. L'équation différentielle s'écrit ainsi : $Y'(t) = \begin{bmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = F(t, Y(t))$ où $F\left(t, Y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y_2 \\ t - y_1 \end{bmatrix}$.

y"= t-y

Question 3

Programmer les méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2 et 4 (on écrira des fonctions `RK2` et `RK4` avec les mêmes entrées et sorties que `EulerExplicite`).

Les tester sur les problèmes de la question précédente.

En utilisant les mêmes entrées des schémas d'Euler, vous pouvez facilement programmer les méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2 du point milieu (composition du schéma d'Euler) :

$$y_0 = \eta$$
$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)\right)$$

Posons $k_1 = hf(t_n, y_n)$ et $k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$, on arrive à $y_{n+1} = y_n + k_2$.

Question 4

L'étude du mouvement d'un pendule simple sans frottements amène à l'étude de la résolution de l'équation différentielle suivante, non linéaire.

$$L\theta''(t) = -g\sin\theta(t)$$

Teta " = -g/L sin(teta)

L désignant la longueur du pendule, g l'accélération due à la pesanteur, $\theta(t)$ étant l'angle constitué par le pendule et la verticale.

On prendra $g = 9,81$ m/s^2 et $L = 1$ m.

Les conditions initiales considérées sont, $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ et $\theta'(0) = 0$. On se limitera à des calculs dans $t \in [0, 8]$.

Résoudre le problème du pendule avec $h = 0,04$ avec les trois méthodes codées. Représenter graphiquement $\theta(t)$ en fonction de t sur l'intervalle considéré. Les résultats obtenus semblent-ils pertinents ? Essayer avec d'autres pas de discrétisation et commenter.

1. Reformuler cette équation différentielle sous la forme d'un problème de Cauchy.
   Posons $\Theta(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{bmatrix}$ et $F(t, \Theta(t)) = \begin{bmatrix} \theta' \\ -\frac{g}{L}\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$. L'équation différentielle s'écrit ainsi : $\Theta'(t) = F(t, \theta(t))$ où $F\left(t, \Theta(t) = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ -\frac{g}{L}\sin(\theta_1) \end{bmatrix}$.

   TestCase: programmer F

   $\rightsquigarrow$ faire appeler les méthodes adaptées (Euler explicite, RK2, RK4) pour calculer numériquement la solution $\theta(t)$ et la tracer en considérant
   - $g = 9.81 m/s^2$; $L = 1m$; $h = 0.04$ h = (b-a)/ N --> N=(b-a)/h
   - $I = [0; 8]$
   - Conditions initiales $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ et $\theta'(0) = 0$.

   $\rightsquigarrow$ Commenter les résultats. Portrait de phase

   $\rightsquigarrow$ Modifier la valeur de h et commenter le résultat (calculer les erreurs entre deux valeurs différentes de h).

   Lr^2 = -g

1. Dans le cas des petites oscillations, on peut approcher l'équation par $L\theta''(t) = -g\theta(t)$, équation linéarisée, qui a des solutions de la forme $\theta(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ avec $\omega^2 = \frac{g}{L}$.
   On va expérimenter le bienfondé de l'approximation des petites oscillations.
   (a) On pose la condition initiale $\theta(0) = 10^{-5}$ et $\theta'(0) = 0$. Comparer la solution calculée numériquement et la solution explicite obtenue grâce à la résolution de l'équation linéarisée.
   Pour comparer la solution calculé numériquement et la solution explicite obtenue grâce à la résolution de l'équation linéarisée, il faut
   - déterminer la valeur A, Utiliser les conditions initiales
   - Programmer la solution exacte
   - Tracer la solution exacte et celle numérique $\theta[:, 0]$ (première composante de la sortie des méthodes numériques) avec les mêmes paramètres

   Commentez les résultats en terme de déphasage

   (b) On revient à la condition initiale $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ et $\theta'(0) = 0$. Effectuer la même comparaison. Relever la valeur de la période du mouvement et comparer avec celle calculée avec l'équation linéarisée.

Partie difficile :
Graphiquement : la periode T
Algorithme pour déterminer T : Teta(t+T) =Teta(t)