Exercice n°1

1. Soit la formule de quadrature

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{4}f(0) + \frac{3}{4}f\left(\frac{2}{3}\right) := J(f)$$

(a) Montrer que cette formule est exacte pour les polynômes de degré $\leqslant 1$.
Posons $p_i(x) = x^i$ $(i = 0, 1)$ les polynômes de la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$, on écrit ainsi

$$I(p_0) = \int_0^1 dx = 1, \quad J(p_0) = \frac{1}{4}p_0(0) + \frac{3}{4}p_0\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \Longrightarrow I(p_0) = J(p_0);$$
$$I(p_1) = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}, \quad J(p_1) = \frac{1}{4}p_1(0) + \frac{3}{4}p_1\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4} \times 0 + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \Longrightarrow I(p_1) = J(p_1);$$

Par conséquent, la formule est exacte pour les polynômes de degré $\leqslant 1$.

(b) Cette formule est-elle exacte pour les polynômes de degré $\leqslant 2$? Justifier.
Pour vérifier si cette formule est exacte les polynômes de degré $\leqslant 2$, il suffit de vérifier $I(p_2) = J(p_2)$. On a

$$I(p_2) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3};$$
$$J(p_2) = \frac{1}{4}p_2(0) + \frac{3}{4}p_2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4} \times 0^2 + \frac{3}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}.$$

On en déduit donc que $I(p_2) = J(p_2)$, donc la formule est exacte pour les polynômes de degré $\leqslant 2$.

2. Soit la formule de quadrature

$$\int_0^\alpha g(\xi)d\xi \approx \frac{\alpha}{4}g(0) + \frac{3\alpha}{4}g\left(\frac{2\alpha}{3}\right)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$.

(a) En effectuant le changement de variable suivant $x = \frac{\xi}{\alpha}$ et en utilisant la première question, montrer que cette formule est exacte pour les polynômes de degré $\leqslant 2$.
En utilisant le changement de variable $x = \frac{\xi}{\alpha}$ pour passer de l'intervalle $[0; \alpha]$ à $[0; 1]$ et la formule de quadrature vue en question 1., on obtient

$$J_\alpha(g) := \int_0^\alpha g(x)dx = \alpha \int_0^1 g(\alpha x)dx = \alpha\left(\frac{1}{4}g(\alpha \times 0) + \frac{3}{4}g\left(\frac{2\alpha}{3}\right)\right) = \alpha J(g(\alpha\cdot)).$$

Comme $J(f)$ est exacte pour les polynômes de degré $\leqslant 1$, donc $J_\alpha(g)$ est exacte pour les mêmes polynômes à un coefficient près. (Vous pouvez aussi utiliser la même démarche de la question 1 et 2 pour répondre à cette question).

(b) On suppose que g est une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ et on note $M_3 = \sup_{0\leqslant\xi\leqslant\alpha}\left|g^{(3)}(\xi)\right|$. Estimer l'erreur commise par cette approximation en fonction de M_3 et de α.
Comme g est de classe $C^3([0;\alpha])$, pour tout $x \in [0;\alpha]$, il existe un $\xi_x \in]0;x[$ tel que (développement de Taylor-Lagrange de g à l'ordre 3) :

$$\begin{aligned} g(x) &= g(0) + \frac{x}{1!}g'(0) + \frac{x^2}{2!}g^{(2)}(0) + \frac{x^3}{3!}g^{(3)}(\xi_x) \\ &= g(0) + xg'(0) + \frac{x^2}{2}g^{(2)}(0) + \frac{x^3}{6}g^{(3)}(\xi_x) = P(x) + R(x) \end{aligned}$$

où $P(x) = g(0) + xg'(0) + \frac{x^2}{2}g^{(2)}(0)$ et $R(x) = \frac{x^3}{6}g^{(3)}(\xi_x)$
On essaye maintenant de majorer en fonction de M_3 et de α les valeurs de $|I(R)|$, de $|J(R)|$ et de $|E(R)|$. On a

$$|I(R)| = \left|\int_0^\alpha R(x)dx\right| \leqslant \frac{M_3}{6}\int_0^\alpha x^3dx = \frac{M_3}{24}\alpha^4.$$

On a $J_\alpha(R) = \alpha\left[\frac{1}{4}R(0) + \frac{3}{4}R\left(\frac{2}{3}\alpha\right)\right]$ avec $R(x) = \frac{x^3}{6}g^{(3)}(\xi_x)$. On en déduit que

$$|J(R)| \leqslant \alpha\left[\frac{3}{4}\frac{\left(\frac{2}{3}\alpha\right)^3}{6}|g^{(3)}(\xi_x)|\right] \leqslant \frac{M_3}{54}\alpha^4$$

Comme $E(R) = I(R) - J(R)$, on obtient

$$|E(R)| \leqslant |I(R)| + |J(R)| = \frac{M_3}{24}h^4 + \frac{M_3}{54}h^4 = \frac{13M_3}{216}h^4$$

Par linéarité, on a $E(g) = E(P) + E(R)$ et même $E(g) = E(R)$ puisque $E(P) = I(P) - J_\alpha(P) = 0$ car la méthode d'intégration d'intégration numérique $J\alpha$ est d'ordre 2, voir la question 1.(c). On obtient

$$|E(g)| = |E(R)| \leqslant \frac{13M_3}{216}\alpha^4.$$

Exercice n°2 On considère un problème $(\mathcal{P})$ de Cauchy $y' = f(t,y)$ avec $y(a) = \alpha$ pour $t \in [a; a+T]$. La méthode de Heun est une méthode numérique à un pas où le calcul de y_{n+1} à partir de y_n est décrite par

$$\begin{cases} \text{(prédicteur)} & \bar{y}_n = y_n + hf(t_n, y_n), \\ \text{(correcteur)} & y_n = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \bar{y}_{n+1})\right). \end{cases}$$

1. Expliquer en quoi on peut affirmer que cette méthode est inspirée de la méthode des trapèzes.
D'après le problème $(\mathcal{P})$ de Cauchy, la solution exacte $y(t)$ vérifie $y' = f(t,y)$. Ce qui nous donne par intégration entre t_n et t_{n+1} :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt. \tag{1}$$

Supposons que le pas de subdivision (ou discrétisation) $h_n = t_{n+1} - t_n$ de l'intervalle $I = [a; a+T]$ est constant et vaut $h = \frac{(a+T)-a}{N} = \frac{T}{N}$, $N \in \mathbb{N}^*$. (La généralisation à un pas non constant est triviale). En appliquant la méthode des Trapèzes pour approcher l'intégrale (1), on obtient

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right) - \frac{h^3}{12} y^{(3)}(\xi), \quad \xi \in [t_n; t_{n+1}].$$

où le terme $y^{(3)}$ correspond à la dérivée seconde par rapport t de la fonction $f(t, y(t))$. Ceci mène au schéma de Crank-Nicolson :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right), \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1.$$

qui est implicite comme le schéma d'Euler implicite (ou rétrograde).
On peut construire un nouveau schéma dit prédicteur-correcteur d'Euler-Cauchy (Heun) via les étapes suivantes :

— on cherche d'abord une estimation grossière de y_{n+1}, notée $\bar{y}_{n+1}$, via l'utilisation par exemple de la méthode d'Euler explicite
— on améliore ensuite cette estimation en s'inspirant du schéma d'Euler implicite.
— Enfin, on établit le schéma

$$\begin{cases} \text{(prédicteur)} & \bar{y}_n \quad = y_n + h f(t_n, y_n), \\ \text{(correcteur)} & y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \bar{y}_n)\right), \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1. \end{cases}$$

2. Montrer que cette méthode est consistante.

$$\phi(t, y, h) = \frac{1}{2} f(t, y) + \frac{1}{2} f(t+h, y+hf(t, y)),$$

On en déduit que $\phi(t, y, 0) = f(t, y)$. on utilise le développement de ε_n en puissance. de h. On a, avec $y'(t_n) = f(t_n, y(t_n))$,

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + h y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \\ \phi(t_n, y_n, h) &= \phi(t_n, y_n, 0) + h \frac{\partial \phi}{\partial k}(t_n, y_n, \xi) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= y(t_{n+1}) - y(t_n) - h\phi(t_n, y_n, h) \\ &= h\left(f(t_n, y(t_n)) - \phi(t_n, y(t_n), 0)\right) + \frac{h^2}{2}\left(y''(\xi_n) - 2\frac{\partial \phi}{\partial k}(t_n, y_n, \xi)\right) \end{aligned}$$

Pour que le schéma à un pas soit consistante, il faut que $\phi(t, y, 0) = f(t, y)$ pour tout $(t, y) \in [a; a+T] \times \mathbb{R}$. On obtient ainsi

$$\varepsilon_n \leqslant \frac{h^2}{2}\left| y''(\xi_n) - 2\frac{\partial \phi}{\partial k}(t_n, y_n, \xi) \right| \leqslant C\, h^2$$

Ici, nous avons utilisé le fait que f est de classe C^1 et ϕ de classe C^1.

3. Montrer que cette méthode est stable.
   D'après le schéma d'Heun, on a

$$\phi(t,y,h) = \frac{1}{2}f(t,y) + \frac{1}{2}f(t+h, y+hf(t,y)),$$

   Pour $y, z \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\phi(t,y,h) - \phi(t,z,h) &= \frac{1}{2}f(t,y) + \frac{1}{2}f(t+h,y+hf(t,y)) - \frac{1}{2}f(t,z) - \frac{1}{2}f(t+h,z+hf(t,z)) \\ &= \frac{1}{2}\left[f(t,y) - f(t,z)\right] + \frac{1}{2}\left[f(t+h,y+hf(t,y)) - f(t+h,z+hf(t,z))\right]\end{aligned}$$

   Supposons que f vérifie la condition de Lipschitz ($|f(t,u)-f(t,v)| \leqslant k|u-v|$). Par application de la condition de Lipschitzienneté avec $u = x$ et $v = y$, puis avec $u = y+hf(t,)$ et $v = z+hf(t,z)$)

$$\begin{aligned}|\phi(t,y,h) - \phi(t,z,h)| &\leqslant \frac{k}{2}|y-z| + \frac{k}{2}|y+hf(t,y) - z - hf(t,z)| \\ &\leqslant \frac{k}{2}|y-z| + \frac{k}{2}|y-z| + \frac{k}{2}|hf(t,y) - hf(t,z)| \\ &\leqslant k|y-z| + \frac{hk^2}{2}|y-z| = \left(k + \frac{hk^2}{2}\right)|y-z|.\end{aligned}$$

   D'où, la fonction ϕ vérifie la condition de Lipschitz avec $L = k + \frac{hk^2}{2}$. Par conséquent, le schéma d'Heun est stable.
   $\rightsquigarrow$ La méthode d'Heun est stable et consistante, donc elle est convergence.

Exercice n°3 Considérons le problème de Cauchy suivant $(\mathcal{S})\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)), \forall t \in [0,9], \\ y(0) = \alpha \in \mathbb{R}, \end{cases}$ où f est de classe $C^2([0,9]\times\mathbb{R})$ et ℓ-lipschitzienne en y.On propose le schéma suivant

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\Phi\left(t_n, y_n, h\right), n \in \{0,1,\ldots,N\}, N \in \mathbb{N}^\star \\ \Phi(t,y,h) = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t,y)\right), \\ y_0 = y(0) \end{cases}$$

1. Montrer que ce schéma est consistant.

$$\phi(t,y,h) = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t,y)\right. ,$$

   Pour $h = 0$, on a $\phi(t,y,0) = f(t,y)$. On écrit maintenant le développement en puissance de h des quantités suivantes, avec $y'(t_n) = f(t_n, y(t_n))$,

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_n) \\ \phi(t_n,y_n,h) &= \phi(t_n,y_n,0) + h\frac{\partial\phi}{\partial h}(t_n,y_n,\xi) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= y(t_{n+1}) - y(t_n) - h\phi(t_n, y_n, h)\\ &= h\left(f(t_n, y(t_n)) - \phi(t_n, y(t_n), 0)\right) + \frac{h^2}{2}\left(y''(\xi_n) - 2\frac{\partial \phi}{\partial h}(t_n, y_n, \xi)\right)\end{aligned}$$

En utilisant $\phi(t, y, 0) = f(t, y)$ pour tout $(t, y) \in [0; 9] \times \mathbb{R}$, on obtient

$$\varepsilon_n \leqslant \frac{h^2}{2}\left|y''(\xi_n) - 2\frac{\partial \phi}{\partial k}(t_n, y_n, \xi)\right| \leqslant C\,h^2$$

Ici, nous avons utilisé le fait que f est de classe C^2 et donc ϕ est aussi de classe C^2.

2. Montrer que ce schéma est stable. En utilisant

$$\phi(t, y, h) = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t, y)\right),$$

Pour $y, z \in \mathbb{R}$, on a

$$\phi(t, y, h) - \phi(t, z, h) = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t, y)\right) - f\left(t + \frac{h}{2}, z + \frac{h}{2}f(t, z)\right).$$

Comme f vérifie la condition de Lipschitz ($|f(t, u) - f(t, v)| \leqslant \ell|u - v|$). Par application de la condition de Lipschitzienneté avec $u = x$ et $v = y$, puis avec $u = y + hf(t,)$ et $v = z + hf(t, z)$)

$$|\phi(t, y, h) - \phi(t, z, h)| \leqslant \ell|y + \frac{h}{2}f(t, y) - z - \frac{h}{2}f(t, z)| \leqslant \ell|y - z| + \frac{\ell^2 h}{2}|y - z| \qquad = \ell\left(1 + \frac{h\ell}{2}\right)|y$$

D'où, la fonction ϕ vérifie la condition de Lipschitz avec $L = \ell\left(1 + \frac{h\ell}{2}\right)$. Par conséquent, le schéma est stable.

Montrer que ce schéma est convergent.

$\rightsquigarrow$ D'après les questions précédente, ce schéma est stable et consistant, donc il est convergent.

Dans cette question on suppose que $f(t, y) = 3y(t) - 3t$ et $y(0) = \frac{1}{3}$.

a) Vérifier bien que $y(t) = t + \frac{1}{3}$ est l'unique solution de $(\mathcal{S})$.

b) En utilisant le schéma précédent, donner l'approximation $y(0.3)$ à l'aide d'un pas de discrétisation numérique $h = 0.1$ et la comparer avec la solution exacte.