Exercice n°1 Dans ce TD, on va étudier d'autres schémas pour la résolution numérique de l'équation de la chaleur prise en exemple dans le cours :

$$(EDP)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = 0 \quad \forall (x,t) \in [0,1]\times \mathbb{R}_+^\star, \\ u(0,t) = u(1,t) & = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^\star, \\ u(x,0) & = u_0(x) \quad \forall x \in [0,1] \end{cases}$$

On reprend dans un premier temps la même discrétisation avec $h = \frac{1}{N+1}$ et h le pas de temps. On note u_j^n la valeur approchée de $u(x_j, t_n)$ avec $x_j = jh$ et $t_n = n\tau$. On reprend la même discrétisation des conditions initiales et aux limites.

1 Schéma d'Euler implicite

On considère d'abord le schéma dit d'Euler implicite qui est le suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \nu\frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{h^2} = 0.$$

1. Montrer que ce schéma est consistant avec l'équation de la chaleur, qu'il est précis d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.

On note $u(x,t)$ la solution exacte de l'EDP et u_j^n la solution numérique de l'EDF :

$$(EDF) : \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \nu\frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{h^2} = 0, \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant N.$$

Pour montrer que le schéma d'Euler implicite est consistant, on écrit le développement en série de Taylor pour toutes les quantités en fonction de $u_j^{n+1} :\approx u(x_j, t_{n+1})$ au voisinage du point $(x_j, t_{n+1}) = (jh, (n+1)\tau)$:

$$\begin{aligned} u_j^n &= u_j^{n+1} - \frac{\tau}{1!}\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_{n+1}) + \frac{\tau^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_{n+1}) + o(\tau^2) \\ u_{j+1}^{n+1} &= u_j^{n+1} + \frac{h}{1!}\frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t_{n+1}) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_{n+1}) + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j,t_{n+1}) + \frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_{n+1}) + o(h^4) \\ u_{j-1}^{n+1} &= u_j^{n+1} - \frac{h}{1!}\frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t_{n+1}) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_{n+1}) - \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j,t_{n+1}) + \frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_{n+1}) + o(h^4) \end{aligned}$$

— **Rappel :** Une fonction $f(h)$ est un "petit o" de h^n (i.e. $f(h) = o(h^n)$) s'il existe une constante $k > 0$ telle que $|f(h)| \leqslant k\, h^n$.
— **Remarque :** vous pouvez utiliser l'écriture suivante :

$$u_j^n = u_j^{n+1} - \frac{\tau}{1!}\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{(j,n+1)} + \frac{\tau^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{(j,n+1)} + o(\tau^2).$$

Par un calcul simple, on a

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_{n+1}) - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_{n+1}) + o(\tau)$$
$$u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} = h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_{n+1}) + \frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_{n+1}) + o(h^4)$$

En reportant ces développements dans l'équation aux différence, il vient que

$$\begin{aligned}\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau} - \nu\frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{h^2} &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_{n+1}) - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_{n+1}) \\ &\quad - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_{n+1}) - \nu\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_{n+1}) + o(\tau) + o(h^2).\end{aligned}$$

De l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, il vient que

$$E_j^n = \frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau} - \nu\frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{h^2} = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_{n+1}) - \nu\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_{n+1}) + o(\tau) + o(h^2).$$

Pour obtenir la condition permettant d'annuler les premiers termes dans la relation précédente, qui font intervenir les dérivées d'ordre supérieur $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ on dérive la relation l'EDP $\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ par rapport t, et on permute les dérivées en t et x :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nu\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2} = \nu\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t} = \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \nu^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}.$$

On peut donc écrire l'erreur de troncature sous la forme

$$E_j^n = -\nu\left(\frac{\tau}{2} + \nu\frac{h^2}{12}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_{n+1}) + o(\tau) + o(h^2)$$

En utilisant le fait que u solution de l'EDP satisfait certaines conditions de régularités, alors il existe une constante $C := \max\left(\frac{nu}{2}, \frac{\nu^2}{12}\right)\sup_{x,t}|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_{n+1})|$ telle que

$$|E_j^n| \leqslant C(\tau + h^2)$$

Par passage à la limite $\tau \longrightarrow 0$ et $h \longrightarrow 0$, l'erreur de troncature tend vers 0. Le schéma numérique est ainsi consistant à l'EDP et l'erreur de troncature est d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace (l'erreur est en $o(\tau + h^2)$).

2. On pose comme dans le cours $U^n = (u_1^n, u_2^n, \cdots, u_N^n)^T$. Montrer que le schéma d'équation se traduit sous la forme matricielle : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_i u^{n+1} = u^n$. On réutilise le schéma d'Euler implicite :

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau} - \nu\frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{h^2} = 0.$$

Soit ainsi

$$u_j^{n+1} - \tau\nu\frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{h^2} = u_j^n.$$

Posons $\alpha = \nu \dfrac{\tau}{h^2}$, on obtient facilement

$$-\alpha u_{j-1}^{n+1} + (1+2\alpha)u_j^{n+1} - \alpha u_{j+1}^{n+1} = u_j^n.$$

Pour écrire la forme matricielle de ce schéma, il faut maintenant prendre en considération les conditions aux limites $u_0^{n+1} = u_{N+1}^{n+1} = 0$. Pour $j = 1$, puisque $u_0^{n+1} = 0$, le problème se simplifie

$$(1+2\alpha)u_1^{n+1} - \alpha u_2^{n+1} = u_1^n.$$

De même, pour $j = N$, on a

$$-\alpha u_{N-1}^{n+1} + (1+2\alpha)u_N^{n+1} = u_N^n.$$

Ainsi, l'équation aux différence finies s'écrit

$$\begin{bmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \vdots \\ 0 & -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+2\alpha & -\alpha \\ 0 & \cdots & \cdots & -\alpha & 1+2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N^n \end{bmatrix}$$

En d'autre termes, le vecteur $U^n = (u_j^n)_{1 \leqslant j \leqslant N}$ est solution du système matriciel

$$M(\alpha)U^{n+1} = U^n$$

où $M(\alpha) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ (ou encore $M(\alpha) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$) est une matrice tridiagonale que nous pouvons écrire comme suit :

$$M(\alpha) = I_N + \alpha A$$

où I_N est la matrice identité et A est définie par :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix} := Tridiag(-1, 2, -1).$$

Par conséquent, on a la méthode suivante pour une approximation numérique de la solution de l'EDP :

(a) On choisit les pas de maillage $h > 0$ et τ petits (détermine la subdivision d'espace $(x_j)_{j=0,\cdots,N+1}$ et celle du temps $(t_n)_{n=0,\cdots,m}$)

(b) On détermine une approximation de par les développements de Taylor,

(c) On en déduit un système matriciel $MU^{n+1} = U^n$ dont la solution $U^n = (u_1^n, u_2^n, \cdots, u_N^n)^T$ approche le vecteur $(u^n(x_1), u^n(x_2), \cdots, u^n(x_N))^T$.

(d) On résout le système $M(\alpha)U^{n+1} = U^n$.

3. Expliquer rapidement comment on programmerait l'algorithme dans ce cas.

Algorithm 1 Algorithme d'Euler implicite pour l'EDP

(a) Choix des pas de discrétisation τ et h.

(b) Initialisation du vecteur U contenant le vecteur $u(jh)$ discrétisé en espace : on a donc

une boucle sur j de 0 à N :

$U(j) = u(jh)$

fin de la boucle

(c) Construction de la matrice M

(d) Boucle en temps

Pour n de 1 à m Faire

$V(0) = 0$, $V(m) = 0$

$V = M^{-1}(\alpha) * U$

dessin du graphe $(X(j), U(j))$

Fin pour de la boucle en temps

4. En analysant les valeurs propres de M, montrer que l'on a avec la norme 2, l'inégalité :

$$||u^{n+1}||_2 \leqslant ||u^n||_2.$$

— Méthode 1 : il suffit de constater que la matrice $M(\alpha)$ peut s'écrire sous la forme

$$M(\alpha) = I + \alpha A$$

où A est la matrice tridiagonale définie par $A = Tridiag(-1, 2, -1)$. Or, les valeurs propres de A sont données par

$$\beta_j = 4\sin^2\left(j\frac{\pi}{2(N+1)}\right), \quad \forall j \in \{1, \cdots, N\}.$$

On en déduit directement les valeurs propres de la matrice $M(\alpha)$:

$$\lambda_j = 1 + 4\alpha\sin^2\left(j\frac{\pi}{2(N+1)}\right), \quad \forall j \in \{1, \cdots, N\}.$$

Comme $M(\alpha)$ est matrice symétrique alors $||M(\alpha)||_2 = \rho(M(\alpha))$ où $\rho(M(\alpha))$ et le rayon spectral de la matrice $M(\alpha)$ défini par

$$\rho(M(\alpha)) = \inf\{||M(\alpha)||, \ ||\cdot|| \text{ est une norme matricielle}\}.$$

Soit ainsi $||M(\alpha)||_2 = ||I + \alpha A||_2 = \rho(I + \alpha A) = \max\left(|1 + 4\sin^2\left(j\frac{\pi}{2(N+1)}|\right)\right) > 1$. Par conséquent

$$\rho(M^{-1}(\alpha)) < 1.$$

Comme les valeurs propres de $M(\alpha)$ sont strictement positives alors $M(\alpha)$ est définie positive donc elle inversible et on a $u^{n+1} = M^{-1}(\alpha)u^n$. En utilisant la norme 2, on obtient

$$||u^{n+1}||_2 = ||M(\alpha)^{-1}u^n||_2 \leqslant ||M(\alpha)^{-1}||_2||u^n||_2 \leqslant ||u^n||_2.$$

— Méthode 2 : Si $U = (u_j^n)_{1 \leqslant j \leqslant N}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ (c'est-à-dire $M(\alpha)U = \lambda U$ où $U \neq 0_{\mathbb{R}^N}$). On écrit ainsi

$$\begin{aligned} &-\alpha u_{j-1}^{n+1} + (1+2\alpha)u_j^{n+1} - \alpha u_{j+1}^{n+1} = \lambda u_j^{n+1}, \quad \forall j \in \{1, \cdots, N\} \\ &-\alpha u_{j+1}^{n+1} + (1+2\alpha-\lambda)u_j^{n+1} - \alpha u_{j-1}^{n+1} = 0, \quad \forall j \in \{1, \cdots, N\}. \end{aligned}$$

Pour calculer les u_j^{n+1}, on introduit l'équation caractéristique :

$$-\alpha r^2 + (1+2\alpha-\lambda)r - \alpha = 0.$$

— Si l'équation caractéristique a une racine double, comme $\Delta = (1+2\alpha-\lambda)^2 - 4\alpha^2$, alors on a $\lambda = 1$ ou $\lambda = 1+4\alpha$. Montrons maintenant que ces deux cas sont impossibles :
  — si $\lambda = 1$ alors la racine est $r = 1$ et la théorie des suites récurrentes nous dit qu'il existe a et b tels que, pour tout j, on a

$$u_j = a(1)^j + bj(1)^j.$$

  Comme $u_0 = 0$ et $u_{N+1} = 0$ on arrive à $a = 0$ et $b = 0$. Donc $u_j = 0$ pour tout j et donc on n'a pas de vecteurs propres.
  — si $\lambda = 1+4\alpha$ alors la racine est $r = -1$. On applique la même démarche et on en déduit qu'il n'existe pas de vecteurs propres.

— Si l'équation caractéristique a deux racines r_1 et r_2, alors on a pour tout j :

$$u_j = ar_1^j + br_2^j, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

En utilisant $u_0 = 0$, on obtient $a = -b$ et puisque nous cherchons un vecteur propre non nul alors $a \neq 0$. De même, $u_{N+1} = 0$ implique

$$r_1^{N+1} = r_2^{N+1}.$$

En utilisant le lien entre les coefficients et les racines de l'équation du $2^{\text{ème}}$ ordre, on a $r_1 r_2 = 1$. On en déduit

$$r_1^{2(N+1})= 1.$$

Par conséquent, il existe un k tel que $r_1 = e^{\frac{2ik\pi}{2(N+1}}$. En utilisant le lien entre les coefficients et les racines de l'équation du $2^{\text{ème}}$ ordre :

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= \frac{1+2\alpha-\lambda}{\alpha} = 2\cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right), \\ u_j &= a(r_1^j - r_2^j) = 2a\sin\left(\frac{jk\pi}{N+1}\right). \end{aligned}$$

En variant k, on obtient les valeurs propres λ_k et les vecteurs propres $U_k = (u_j^k)_j$ associés de la matrice $M(\alpha)$:

$$\begin{aligned} \lambda_k &= 1 + 4\alpha\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right), \\ u_j^k &= \sin\left(\frac{jk\pi}{N+1}\right). \end{aligned}$$

Ensuite, on applique la même démarche de la première méthode pour prouver $||u^{n+1}||_2 \leqslant ||u^n||_2$.

5. En déduire la stabilité du schéma implicite en norme 2.
   Un schéma numérique est dit stable s'il admet une solution et s'il existe une constante $C > 0$ indépendante de τ et de h telle que
$$||u^n||_2 \leqslant C||u^0||_2, \quad \forall n \geqslant 0.$$
   quelle que soit la donnée initiale u^0. Si cette inégalité a lieu sous une condition entre de τ et de h, on dit que le schéma est conditionnellement stable. D'après la question 4, on a
$$||u^{n+1}||_2 \leqslant ||u^n||_2.$$
   Par récurrence, on obtient
$$||u^{n+1}||_2 \leqslant ||u^n||_2 \leqslant ||u^{n-1}||_2 \leqslant \cdots \leqslant ||u^0||_2$$
   Par conséquent, le schéma numérique est stable.
6. A l'aide du principe du maximum discret, montrer la stabilité du schéma d'Euler implicite en norme ∞. Pour $\alpha = \nu \dfrac{\tau}{h^2}$, on a
$$u_j^n = -\alpha u_{j-1}^{n+1} + (1+2\alpha)u_j^{n+1} - \alpha u_{j+1}^{n+1}.$$
   Soit $j_0 \in \{1, \cdots, N+1\}$ tel que
$$u_{j_0}^{n+1} = \max_{1 \leqslant j \leqslant N} u_j^{n+1}.$$
   Alors, puisque $u_{j_0}^{n+1} \geqslant u_j^{n+1}$, on obtient
$$u_{j_0}^n = -\alpha u_{j_0-1}^{n+1} + (1+2\alpha)u_{j_0}^{n+1} - \alpha u_{j_0+1}^{n+1} \geqslant -\alpha u_{j_0}^{n+1} + (1+2\alpha)u_{j_0}^{n+1} - \alpha u_{j_0}^{n+1},$$
   d'où $\max_{1 \leqslant j \leqslant N} u_j^n = u_{j_0}^n \geqslant u_{j_0}^{n+1} = \max_{1 \leqslant j \leqslant N} u_j^{n+1}$. On en déduit
$$\max_{1 \leqslant j \leqslant N} u_j^0 \geqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant N} u_j^n, \quad \forall n \in \{1, \cdots, m\}.$$
   Par conséquent, on arrive au principe du maximum discret et ainsi le schéma implicite centré est inconditionnellement stable en norme ∞.

2 Schéma de Crank-Nicolson

Le principe du schéma de Crank-Nicolson est de faire la moyenne des deux schémas d'Euler explicite et implicite. On arrive au schéma suivant :
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \nu \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{2h^2} - \nu \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{2h^2} = 0.$$

1. Montrer que ce schéma est consistant, précis d'ordre 2 en temps et d'ordre 2 en espace. On écrit le développement en série de Taylor au point (x_j, t_n) à l'ordre 2 en temps :

$$u_j^{n+1} = u(x_j, t_n) + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) + o(\tau^2).$$

Ensuite, on utilise le fait que u est solution de l'EDP, on obtient

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) + o(\tau^2)$$

De même, on a les développements en série de Taylor :

$$\begin{aligned}
u_{j-1}^n &= u(x_j, t_n) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t_n) + o(h^4) \\
u_{j+1}^n &= u(x_j, t_n) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t_n) + o(h^4)
\end{aligned}$$

et

$$\frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_j^n}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + o(h^2).$$

En remplaçant n par $n+1$ dans l'égalité précédente, on obtient suite à un développement en série de Taylor au point (x_j, t_n) que et

$$\frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_j^{n+1}}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{n+1}) + o(h^2).$$

En utilisant $\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = 0$, on arrive à

$$\begin{aligned}
\frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_j^{n+1}}{h^2} &= \frac{1}{\nu} \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_{n+1}) + o(h^2) \\
&= \frac{1}{\nu} \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + \frac{\tau}{\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) + o(h^2 + \tau^2) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + \frac{\tau}{\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) + o(h^2 + \tau^2)
\end{aligned}$$

Par combinaison linéaire des développements calculés précédemment, il vient que

$$\begin{aligned}
CN &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \nu \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_j^{n+1}}{2h^2} - \nu \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_j^n}{2h^2} \\
&= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) + o(\tau^2) - \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) \\
&\quad - \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) - \frac{\nu}{2} \frac{\tau}{\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) + o(h^2 + \tau^2).
\end{aligned}$$

Après simplification, on obtient

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \nu \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_j^{n+1}}{2h^2} - \nu \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_j^n}{2h^2} = o(h^2 + \tau^2).$$

$$|E_j^n| = (\tau^2 + h^2)$$

Par passage à la limite $\tau \longrightarrow 0$ et $h \longrightarrow 0$, l'erreur de troncature tend vers 0 et on retrouve l'ordre 2 en temps et d'ordre 2 en espace du schéma numérique.

2. Présenter ce schéma sous forme matricielle et décrire sa mise en œuvre pratique. Pour $\alpha = \nu\frac{\tau}{h^2}$, le schéma numérique de Crank-Nicolson s'écrit ainsi

$$-\frac{\alpha}{2}u_{j-1}^{n+1} + \left(1+2\frac{\alpha}{2}\right)u_j^{n+1} - \frac{\alpha}{2}u_j^{n+1} - \frac{\alpha}{2}u_{j-1}^{n} - \left(1-2\frac{\alpha}{2}\right)u_j^{n} - \frac{\alpha}{2}u_{j+1}^{n} = 0$$

d'où

$$-\frac{\alpha}{2}u_{j-1}^{n+1} + \left(1+2\frac{\alpha}{2}\right)u_j^{n+1} - \frac{\alpha}{2}u_j^{n+1} = \frac{\alpha}{2}u_{j-1}^{n} + \left(1-2\frac{\alpha}{2}\right)u_j^{n} + \frac{\alpha}{2}u_{j+1}^{n}$$

Soit ainsi

$$-\frac{\alpha}{2}u_{j-1}^{n+1} + \left(1+2\frac{\alpha}{2}\right)u_j^{n+1} - \frac{\alpha}{2}u_j^{n+1} = -\frac{-\alpha}{2}u_{j-1}^{n} + \left(1+2\frac{-\alpha}{2}\right)u_j^{n} - \frac{-\alpha}{2}u_{j+1}^{n}$$

Ce qui nous mène à l'écriture matricielle suivante :

$$M\left(\frac{\alpha}{2}\right)U^{n+1} = M\left(-\frac{\alpha}{2}\right)U^{n}.$$

Algorithm 2 Algorithme du schéma Crank-Nicolson

(a) Choix des pas de discrétisation τ et h.

(b) Initialisation du vecteur U contenant le vecteur $u(jh)$ discrétisé en espace : on a donc
    une boucle sur j de 0 à N :
        $U(j) = u(jh)$
    fin de la boucle

(c) Construction de la matrice M

(d) Boucle en temps
    Pour n de 1 à m Faire
        $V(0) = 0$, $V(m) = 0$
        $V = M^{-1}(\frac{\alpha}{2})M(-\frac{\alpha}{2}) * U$
        dessin du graphe $(X(j), U(j))$
    Fin pour de la boucle en temps

3. Étudier la convergence du schéma en norme L^2 en appliquant la condition de stabilité de Von Neumann. L'idée est d'introduire une onde de vecteur K à l'instant n

$$u_j^n = \hat{u}(K)e^{iK\,jh}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

alors compte tenu des propriétés algébriques classiques de la fonction exponentielle, on a

$$u_{j+1}^n = e^{iK\,h}u_j^n, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Rappel : Pour toute fonction $u^n \in L^2(\mathbb{R})$ ($L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert et $\{e^{ikx}, \quad k \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$, on a

$$u^n(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{u}^n(k)e^{ikx}, \quad \hat{u}^n(k) = \int_{\mathbb{R}} u^n(x)e^{-ikx}dx$$

et la formule de Plancherel de conservation d'énergie

$$||u^n||^2_{L^2([0,1])} = \int_0^1 |u^n(x)|^2dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{u}^n(k)|^2 = \int_0^1 |\hat{u}^n(x)|^2dx$$

(a) On introduit le nombre d'onde ξ selon la relation $\xi = K\,h$, alors

$$u_{j+1}^n = e^{i\xi}u_j^n, \quad u_{j-1}^n = e^{-i\xi}u_j^n,$$

(b) On reporte ces valeurs dans le schéma numérique et on a le calcul qui suit :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \nu\frac{e^{-i\xi}u_j^n - 2u_j^n + e^{i\xi}u_j^n}{2h^2} - \nu\frac{e^{-i\xi}u_j^{n+1} - 2u_j^{n+1} + e^{i\xi}u_j^{n+1}}{2h^2} = 0.$$

Posons $\alpha = \nu\frac{\tau}{2h^2}$, on obtient

$$\Big(1 + 2\alpha - \alpha(e^{i\xi} + e^{-i\xi})\Big)\,u_j^{n+1} + \Big(2\alpha - 1 - \alpha(e^{i\xi} + e^{-i\xi})\Big)\,u_j^n = 0.$$

Soit ainsi,

$$u_j^{n+1} = \frac{1 - 2\alpha + \alpha(e^{i\xi} + e^{-i\xi})}{1 + 2\alpha - \alpha(e^{i\xi} + e^{-i\xi})}u_j^n.$$

(c) On introduit maintenant le coefficient d'amplification du schéma $g(\alpha, \xi)$:

$$g(\alpha, \xi) = \frac{1 - 2\alpha + \alpha(e^{i\xi} + e^{-i\xi})}{1 + 2\alpha - \alpha(e^{i\xi} + e^{-i\xi})}.$$

Le calcul précédent établit donc que

$$u_j^{n+1} = g(\alpha, \xi)u_j^n$$

pour une onde de nombre d'onde ξ.

(d) Il suffit maintenant d'écrire cette définition pour $g(\alpha,\xi)$ proposé au schéma numérique. On a d'abord le calcul élémentaire, en utilisant $e^{i\xi}+e^{-i\xi}=2\cos(\xi)$,

$$g(\alpha,\xi)=\frac{1-2\alpha+2\alpha\cos(\xi)}{1+2\alpha-2\alpha\cos(\xi)}=\frac{1-2\alpha(1-\cos(\xi))}{1+2\alpha(1-\cos(\xi))}=\frac{1-4\alpha\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)}{1+4\alpha\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)}=\frac{2}{1+4\alpha\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)}-1$$

On écrit la définition ($\forall\xi\in\mathbb{R},\quad |g(\alpha,\xi)|\leqslant 1$) pour la valeur particulière $\xi=\pi$. Alors $\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)=1$ et $g(\alpha,\xi)=\frac{2}{1+4\alpha}-1$.
$|g(\alpha,\xi)|\leqslant 1$ s'écrit donc

$$-1\leqslant\frac{2}{1+4\alpha}-1\leqslant 1\Longleftrightarrow 0\leqslant\frac{2}{1+4\alpha}\leqslant 2\Longleftrightarrow 1\leqslant 1+4\alpha\Longleftrightarrow\alpha\geqslant 0.$$

Soit ainsi $\alpha=\nu\frac{\tau}{2h^2}\geqslant 0$. Réciproquement, si α vérifie $\alpha=\nu\frac{\tau}{2h^2}\geqslant 0$, on a avec $\xi\in\mathbb{R}$ arbitraire la série d'inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}1+4\alpha\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)&\geqslant 1\\ 0\leqslant\frac{2}{1+4\alpha\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)}&\leqslant 2\\ -1\leqslant\frac{2}{1+4\alpha\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)}-1&\leqslant 1\\ -1\leqslant g(\alpha,\xi)&\leqslant 1\end{aligned}$$

d'où la relation $\forall\xi\in\mathbb{R},\quad |g(\alpha,\xi)|\leqslant 1$ (condition de la stabilité au sens de Von Neumann).

En utilisant la formule de Plancherel, on obtient

$$||u^n||^2_{L^2([0,1])}=\int_0^1|u^n(x)|^2dx=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{u}^n(k)|^2\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{u}^0(k)|^2=\int_0^1|u^0(x)|^2dx=||u^0||^2_{L^2([0,1])}.$$

Conclusion : le schéma est stable en norme L^2 et il est consistant, alors il est convergent en norme L^2.

3 Autres conditions aux limites

1. On considère la même équation de la chaleur avec cette fois, comme condition aux limites :

$$\forall t\in\mathbb{R}^+,\quad u(0,t)=1,\quad u(1,t)=-1.$$

Comment adapter la formulation des trois schémas considérés pour en tenir compte ? il suffit de remarquer que la fonction $v(t,x)$ définie par $v(t,x)=u_0+(u_1-u_0)x$ vérifie l'EDP de la chaleur ainsi que les conditions aux limites de Dirichlet non homogènes en 0 et en 1. Soit ainsi w la solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$(EDP1)\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & =0\quad\forall(t,x)\in[0,1]\times\mathbb{R}^\star_+,\\ u(0,t)=u(1,t) & =0\quad\forall t\in\mathbb{R}^\star_+,\\ u(x,0) & =u_0(x)-v(0,x)\quad\forall x\in[0,1]\end{cases}$$

Ce problème admet une solution puisque c'est un problème de Dirichlet homogène. Posons maintenant $u(t,x)=w(t,x)+v(t,x)$.

— Schéma d'Euler Implicite : la discrétisation de l'équation de la chaleur par le schéma d'Euler implicite prend ainsi la forme suivante :

$$\begin{aligned} u_j^0 &= u_0(jh), \forall j = 1, \cdots, N \\ u_0^n &= 1 = g^{n+1}. \\ -\alpha u_{j-1}^{n+1} + (1+2\alpha)u_j^{n+1} - \alpha u_{j+1}^{n+1} &= u_j^n, \forall j = 1, \cdots, N \\ u_{N+1}^{n+1} &= -1 = d^{n+1}. \end{aligned}$$

Ces conditions n'apparaissent que dans le second membre du système matriciel. En effet, on a

a) Par combinaison de $j = 1$ et $g^{n+1} = u_0^{n+1} = -1$, on a

$$\begin{aligned} -\alpha u_0^{n+1} + (1+2\alpha)u_1^{n+1} - \alpha u_2^{n+1} &= u_1^n \\ 1+2\alpha)u_1^{n+1} - \alpha u_2^{n+1} &= u_1^n + \alpha u_0^{n+1} = u_1^n + \alpha g^{n+1}. \end{aligned}$$

b) Par combinaison de $j = N$ et $d^{n+1} = u_{N+1}^{n+1} = -1$, on obtient

$$\begin{aligned} -\alpha u_{N-1}^{n+1} + (1+2\alpha)u_N^{n+1} - \alpha u_{N+1}^{n+1} &= u_1^N \\ -\alpha u_{N-1}^{n+1} + (1+2\alpha)u_N^{n+1} &= u_1^N + \alpha u_{N+1}^{n+1} = u_1^N + \alpha d^{n+1}. \end{aligned}$$

Posons $V^{n+1} = (g^{n+1}, 0 \cdots, d^{n+1})$ (ici $g^{n+1} = 1$ et $d^{n+1} = -1$), alors le schéma numérique d'Euler implicite s'écrit :

$$M(\alpha)U^{n+1} = U^n + \alpha V^{n+1}.$$

— Schéma d'Euler explicite : en utilisant la même démarche du schéma implicite, l'écriture matricielle est

$$U^{n+1} = M(-\alpha)U^n + \alpha V^n.$$

— Schéma de Crank Nicolson : en utilisant la même démarche du schéma Crank-Nicolson, l'écriture matricielle est

$$M\left(\frac{\alpha}{2}\right)U^{n+1} = M\left(-\frac{\alpha}{2}\right)U^n + \frac{\alpha}{2}\left(V^{n+1} + V^n\right).$$

2. On considère la condition de Neumann $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0$. On fait le choix de la discrétiser par $u_0^n = u_1^n$ et $u_N^n = u_{N+1}^n$. Comment adapter les schémas ?

— Schéma d'Euler implicite : en utilisant $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) \approx \frac{u_1^{n+1} - u_0^{n+1}}{h} = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial x}(1,t) \approx \frac{u_{N+1}^{n+1} - u_N^{n+1}}{h} = 0$, on a

$$\begin{aligned} u_j^0 &= u_0(jh), \forall j = 1, \cdots, N \\ u_1^{n+1} - u_0^{n+1} &= 0 \\ -\alpha u_{j-1}^{n+1} + (1+2\alpha)u_j^{n+1} - \alpha u_{j+1}^{n+1} &= u_j^n, \forall j = 1, \cdots, N \\ u_{N+1}^{n+1} - u_N^{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

a) Par combinaison de $j = 1$ et $u_0^{n+1} = u_1^{n+1}$, il vient que

$$\begin{aligned} -\alpha u_0^{n+1} + (1+2\alpha)u_1^{n+1} - \alpha u_2^{n+1} &= u_1^n \\ (1+\alpha)u_1^{n+1} - \alpha u_2^{n+1} &= u_1^n. \end{aligned}$$

b) De même, par combinaison de $j = N$ et $u_N^{n+1} = u_{N+1}^{n+1}$, il vient que

$$\begin{aligned} &-\alpha u_{N-1}^{n+1} + (1+2\alpha) u_N^{n+1} - \alpha u_{N+1}^{n+1} = u_N^n \\ &-\alpha u_{N-1}^{n+1} + (1+\alpha) u_N^{n+1} = u_N^n. \end{aligned}$$

et on a $-\alpha u_{j-1}^{n+1} + (1+2\alpha) u_j^{n+1} - \alpha u_{j+1}^{n+1} = u_j^n$ pour tout $j = 2, \cdots, N-1$.
Le schéma numérique s'écrit ainsi : $M'(\alpha) U^{n+1} = U^n$ où

$$M'(\alpha) = \begin{bmatrix} 1+\alpha & -\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \vdots \\ 0 & -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+2\alpha & -\alpha \\ 0 & \cdots & \cdots & -\alpha & 1+\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N^n \end{bmatrix}$$

En pratique, cette approche ne donne pas une bonne précision et plus particulièrement au bord du domaine, car elle utilise une approximation de $\frac{\partial u}{\partial x}$ qui est seulement d'ordre 1 en espace. Pour y remédier à ce problème, il faut construire une approximation de $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial x}(1,t)$, d'ordre 2 en espace en introduisant des points fictifs.

— Schéma d'Euler explicite : $U^{n+1} = M'(-\alpha) U^n$.
— Schéma de Crank-Nicolson : $M'\left(\frac{\alpha}{2}\right) U^{n+1} = M'\left(\frac{\alpha}{2}\right) U^n$.

3. On considère la condition de périodicité $u(0,t) = u(1,t)$. Comment adapter les schémas ? On précisera notamment les formats des vecteurs et matrices considérés. Du point de vue discret, la condition de périodicité $u(0,t) = u(1,t)$ conduit à imposer

$$u_0^n = u_{N+1}^n, \quad \forall n \geqslant 0.$$

— Schéma d'Euler implicite : en utilisant les conditions de périodicité ce schéma s'écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} -\alpha u_{j-1}^{n+1} + (1+2\alpha) u_j^{n+1} - \alpha u_{j+1}^{n+1} &= u_j^n, \forall j = 1, \cdots, N, \\ u_{N+1}^{n+1} &= u_0^{n+1}, \\ u_{-1}^{n+1} &= u_N^{n+1}. \end{aligned}$$

— Schéma d'Euler explicite : en utilisant les conditions de périodicité ce schéma s'écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \nu \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{h^2} &= 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant N, \\ u_{N+1}^n &= u_0^n, \\ u_{-1}^n &= u_N^n. \end{aligned}$$

— Schéma de Crank-Nicolson : en utilisant les conditions de périodicité ce schéma s'écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \nu \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{2h^2} - \nu \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{2h^2} &= 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant N, \\ u_{N+1}^n &= u_0^n, \\ u_{-1}^n &= u_N^n. \end{aligned}$$