Exercice n°1 Dans ce TD, on va étudier les propriétés des schémas présentés dans le chapitre sur l'équation d'advection (EDP).

$$(EDP)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}+V\frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \quad \forall (x,t)\in[0,1]\times\mathbb{R}^+,\\ u(x+1,t) &= u(x,t) \quad \forall (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+,\\ u(x,0) &= u_0(x) \quad \forall x\in[0,1]\end{cases}$$

où V est un réel non nul représentant la vitesse d'un écoulement par exemple.

1 Etude du schéma implicite centré

1. Montrer que le schéma implicite centré est consistant, précis à l'ordre 1 en temps et 2 en espace.
   On reprend dans un premier temps la même discrétisation avec $h=\frac{1}{N+1}$ et τ le pas de temps. On note u_j^n la valeur approchée de $u(x_j,t_n)$ avec $x_j=jh$ et $t_n=n\tau$. Le schéma implicite centré de l'EDP s'écrit ainsi

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+V\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2h}=0,\quad n\geqslant 0,\quad 1\leqslant j\leqslant N-1$$

   Pour montrer que ce schéma est consistant, on écrit le développement en série de Taylor en fonction de $u_j^{n+1}:\approx u(x_j,t_{n+1})$ au voisinage du point $(x_j,t_{n+1})=(jh,(n+1)\tau)$:

$$u_j^n=u_j^{n+1}-\frac{\tau}{1!}\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_{n+1})+\frac{\tau^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_{n+1})+o(\tau^2),$$

   d'où

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}=\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_{n+1})-\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_{n+1})+o(\tau).$$

   De même, on a les développements en série de Taylor en fonction de $u_j^{n+1}:\approx u(x_j,t_{n+1})$ au voisinage du point $(x_j,t_{n+1})=(jh,(n+1)\tau)$:

$$\begin{aligned}u_{j+1}^{n+1}&=u_j^{n+1}+\frac{h}{1!}\frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t_{n+1})+\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_{n+1})+\frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j,t_{n+1})+o(h^3),\\ u_{j-1}^{n+1}&=u_j^{n+1}-\frac{h}{1!}\frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t_{n+1})+\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_{n+1})-\frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j,t_{n+1})+o(h^3),\end{aligned}$$

   d'où

$$\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2h}=\frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t_{n+1})+\frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j,t_{n+1})+o(h^2).$$

   En reportant ces développements dans l'équation aux différences finies, il vient que

$$\begin{aligned}\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+V\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2h}&=\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_{n+1})-\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_{n+1})\\ &\quad+V\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t_{n+1})+\frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j,t_{n+1})\right)+o(\tau+h^2).\end{aligned}$$

De l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, il vient que

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_{n+1}) + V\frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t_{n+1}) + o(\tau + h^2).$$

On peut donc écrire l'erreur de troncature sous la forme

$$E_j^n = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_{n+1}) + V\frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t_{n+1}) + o(\tau + h^2).$$

Pour obtenir la condition permettant d'annuler les premiers termes dans la relation précédente, qui font intervenir les dérivées d'ordre supérieur $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, on dérive l'EDP$\frac{\partial u}{\partial t} - V\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ par rapport à t et on permute les dérivées en $t$et x (Ici V est une constante) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -V\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = -V\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

En utilisant le fait que u solution de l'EDP satisfait certaines conditions de régularités, alors il existe une constante $C := \max\left(\frac{1}{2}\sup_{x,t}|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|, \frac{V^3}{6}\sup_{x,t}|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}|\right)$ telle que

$$|E_j^n| \leqslant C(\tau + h^2).$$

Par passage à la limite $\tau \longrightarrow 0$ et $h \longrightarrow 0$, l'erreur de troncature tend vers 0. Le schéma numérique est ainsi consistant à l'EDP et l'erreur de troncature est d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace (l'erreur est en $o(\tau + h^2)$.)

2. Montrer que le schéma centré implicite est inconditionnellement stable en norme L^2.
On utilise la transformée de Fourier définie par :

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}dx$$

qui permet de retrouver facilement le résultat de stabilité du schéma numérique en calculant l'énergie du système à chaque pas de temps.
On multiplie le schéma numérique par $e^{-i\xi x}$ et on intègre sur $[0, 1]$ pour obtenir la transformée de Fourier en espace uniquement :

$$\int_0^1 \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau}e^{-i\xi x}dx + \int_0^1 V\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h}e^{-i\xi x}dx = 0.$$

En notant $u_{j+1}^n = u(x_j + h)$ (où u est une fonction périodique de période 1), les coefficients de u_{j+1}^n :

$$\hat{u}_{j+1}^n(\xi) = \int_0^1 u(x_j + h)e^{-i\xi x_j}dx = \int_h^{1+h} u(y)e^{-i\xi(y-h)}dy = e^{i\xi h}\int_0^1 u(y)e^{-i\xi y}dy = e^{i\xi h}\hat{u}_j^{n+1}.$$

De même, on a $\hat{u}_{j-1}^n(\xi) = e^{-i\xi h}\hat{u}_j^{n+1}$. La relation (**??**) se traduit donc par

$$\frac{\hat{u}_j^{n+1}(\xi) - \hat{u}_j^n(\xi)}{\tau} + V\frac{e^{i\xi h}\hat{u}_j^{n+1} - e^{-i\xi h}\hat{u}_j^{n+1}}{2h} = 0$$

Posons $\alpha = V\dfrac{\tau}{h}$, on a donc

$$\left(1+\alpha\frac{e^{i\xi h}-e^{-i\xi h})}{2}\right)\hat{u}_j^{n+1}-\hat{u}_j^n=0,$$
$$(1+i\alpha\sin(\xi h))\,\hat{u}_j^{n+1}-\hat{u}_j^n=0,$$
$$\hat{u}_j^{n+1}=\frac{1}{1+i\alpha\sin(\xi h)}\hat{u}_j^n=g(\alpha,\xi h)\hat{u}_n^j$$

Rappel : On rappelle qu'un schéma numérique est stable au sens de Von Neumann si et seulement si pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, le coefficient d'amplification $g(\cdot,\cdot)$ vérifie $|g(\alpha,\xi h)| \leqslant 1$.

On rappelle aussi l'égalité Parseval sur $[0,1]$ qui donne la conservation de l'énergie par transformée de Fourier :

$$||u^n||^2_{L^2([0,1])}=\int_0^1|u^n(x)|^2dx=\int_0^1|\hat{u}^n(x)|^2dx.$$

Comme l'énergie d'un système libre (pas de source de chaleur) ne pouvant pas croître, donc l'énergie ne peut que baisser avec le temps, on a ainsi

$$\int_0^1|u^{n+1}(x)|^2dx\leqslant\int_0^1|u^n(x)|^2dx,$$

ou de manière équivalente :

$$\int_0^1|\hat{u}^{n+1}(x)|^2dx\leqslant\int_0^1|\hat{u}^n(x)|^2dx.$$

Ceci est vérifié si le coefficient d'amplification du schéma numérique $|g(\alpha,\xi h)| = \left|\dfrac{1}{1+iV\frac{\tau}{h}\sin(\xi h)}\right| \leqslant 1$. Par conséquent, le schéma pour l'équation d'advection est inconditionnellement stable car il n'y a pas de condition de stabilité sur le pas de temps τ. Mais τ doit être en accord avec le phénomène étudié.

3. Exprimer matriciellement le schéma implicite centré pour l'équation d'advection.
   On rappelle le schéma implicite centré pour l'équation d'advection

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+V\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2h}=0,\quad n\geqslant 0,\quad 1\leqslant j\leqslant N-1.$$

Posons $\alpha = V\dfrac{\tau}{h}$, Ce schéma s'écrit ainsi

$$-\frac{\alpha}{2}u_{j-1}^{n+1}+u_j^{n+1}+\frac{\alpha}{2}u_{j+1}^{n+1}=u_j^n.$$

— Pour $j=1$, on a $u_1^n=-\frac{\alpha}{2}u_0^{n+1}+u_1^{n+1}+\frac{\alpha}{2}u_2^{n+1}=u_1^{n+1}+\frac{\alpha}{2}u_2^{n+1}-\frac{\alpha}{2}u_N^{n+1}$.
— Pour $j=N$, on a $u_N^n=-\frac{\alpha}{2}u_{N-1}^{n+1}+u_N^{n+1}+\frac{\alpha}{2}u_{N+1}^{n+1}=\frac{\alpha}{2}u_1^{n+1}-\frac{\alpha}{2}u_{N-1}^{n+1}+u_N^{n+1}$.
— Pour $2\leqslant j\leqslant N-1$, on a $u_j^n=-\frac{\alpha}{2}u_{j-1}^{n+1}+u_j^{n+1}+\frac{\alpha}{2}u_{j+1}^{n+1}$.

Par conséquent, on a une formulation matricielle $M(\alpha)U^{n+1} = U^n$ où

$$M(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha}{2} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{\alpha}{2} \\ -\frac{\alpha}{2} & 1 & \frac{\alpha}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha}{2} & 1 & \frac{\alpha}{2} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & -\frac{\alpha}{2} & 1 & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{\alpha}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

2 Etude du schéma de Lax-Friedrichs

1. Montrer que le schéma de Lax-Friedrichs, pour l'équation de l'advection, est stable en norme L^2 sous la condition CFL : $|V|\tau \leqslant h$.
   La schéma explicite de Lax-Friedrichs pour l'équation d'advection (EDP) s'écrit

   $$\frac{2u_j^{n+1} - u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\tau} + V\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0, \quad n \geqslant 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant N-1.$$

   En utilisant la même démarche du paragraphe précédent (stabilité de Von Neumann), on a

   $$\begin{aligned} &\frac{2\hat{u}_j^{n+1}(\xi) - e^{i\xi h}\hat{u}_j^n - e^{-i\xi h}\hat{u}_j^n}{2\tau} + V\frac{e^{i\xi h}\hat{u}_j^n - e^{-i\xi h}\hat{u}_j^n}{2h} = 0 \\ &2\hat{u}_j^{n+1}(\xi) = \left[e^{i\xi h} + e^{-i\xi h} - V\frac{\tau}{h}(e^{i\xi h} - e^{-i\xi h})\right]\hat{u}_j^n \\ &2\hat{u}_j^{n+1}(\xi) = \left[2\cos(\xi h) - 2iV\frac{\tau}{h}\sin(\xi h)\right]\hat{u}_j^n \\ &\hat{u}_j^{n+1}(\xi) = \left[\cos(\xi h) - iV\frac{\tau}{h}\sin(\xi h)\right]\hat{u}_j^n \end{aligned}$$

   Posons $\alpha = V\dfrac{\tau}{h}$, on a

   $$|g(\alpha, \xi h)| = \sqrt{\cos^2(\xi h) + \alpha^2\sin^2(\xi h)}.$$

   Le schéma est ainsi stable si et seulement si $|g(\alpha,\xi h)| \leqslant 1 \iff |\alpha| \leqslant 1 \iff |V|\tau \leqslant h$. Par contre, si $|\alpha| > 1$, alors le schéma est instable car on peut avoir $|g(\alpha,\xi h)| = |\alpha| > 1$ pour au moins $\xi h = \frac{\pi}{2}$.
2. Montrer que le schéma de Lax-Friedrichs vérifie le PMD sous CFL : $|V|\tau \leqslant h$.
   On réécrit le schéma de Lax-Friedrichs pour l'équation d'advection avec $\alpha = V\dfrac{\tau}{h}$:

   $$u_j^{n+1} = \frac{1+\alpha}{2}u_{j-1}^n + \frac{1-\alpha}{2}u_{j+1}^n, \quad n \geqslant 0,\ 1 \leqslant j \leqslant N-1.$$

   Si $|\alpha| \leqslant 1$, on a $\frac{1+\alpha}{2} \geqslant 0$ et $\frac{1-\alpha}{2} \geqslant 0$. Alors, u_j^{n+1} est une combinaison convexe de u_{j-1}^n et u_{j+1}^n, (car $\frac{1+\alpha}{2} + \frac{1+\alpha}{2} = 1$).
   Si pour tout j, il existe m et M tels que $m \leqslant u_j^n \leqslant M$, alors on a aussi

   $$\forall j, \quad m \leqslant u_j^{n+1} \leqslant M.$$

Et de proche en proche, on arrivera au principe du maximum discret

$$\forall j, \forall n, \quad \min(u_j^0) \leqslant u_j^n \leqslant \max(u_j^0).$$

Ainsi, le schéma est inconditionnellement stable en norme L^∞.

3. Exprimer matriciellement ce schéma
   Posons $\alpha = V\dfrac{\tau}{h}$. Le schéma implicite centré pour l'équation d'advection s'écrit ainsi

$$u_j^{n+1} = \frac{1+\alpha}{2}u_{j-1}^n + \frac{1-\alpha}{2}u_{j+1}^n.$$

   — Pour $j=1$, on a $u_1^{n+1} = \frac{1+\alpha}{2}u_0^n + \frac{1-\alpha}{2}u_2^n = \frac{1-\alpha}{2}u_2^n + \frac{1+\alpha}{2}u_N^n$.
   — Pour $j=N$, on a $u_N^{n+1} = \frac{1+\alpha}{2}u_{N-1}^n + \frac{1-\alpha}{2}u_{N+1}^n = \frac{1-\alpha}{2}u_1^n + \frac{1+\alpha}{2}u_{N-1}^n$.
   — Pour $j \in \{2, \cdots, N-1\}$, on a $u_j^{n+1} = \frac{1+\alpha}{2}u_{j-1}^n + \frac{1-\alpha}{2}u_{j+1}^n$.
   Par conséquent, on a une formulation matricielle $U^{n+1} = M_{LF}(\alpha)U^n$ où

$$M_{LF}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1-\alpha}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1+\alpha}{2} \\ \frac{1+\alpha}{2} & 0 & \frac{1-\alpha}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1+\alpha}{2} & 0 & \frac{1-\alpha}{2} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \frac{1+\alpha}{2} & 0 & \frac{1-\alpha}{2} \\ \frac{1-\alpha}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1+\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

3 Etude du schéma de Lax-Wendroff

1. Montrer que le schéma de Lax-Wendroff est stable en norme L^2 sous une condition CFL à expliciter.
   La schéma explicite de Lax-Wendroff pour l'équation d'advection (EDP) s'écrit

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} - \frac{V^2\tau}{2}\frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{h^2} = 0, \quad n \geqslant 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant N-1.$$

   En utilisant la même démarche du paragraphe 1. (stabilité de Von Neumann) avec $\alpha = V\dfrac{\tau}{h}$, on a

$$\begin{aligned} &\frac{\hat{u}_j^{n+1} - \hat{u}_j^n}{\tau} + V\frac{e^{i\xi h}\hat{u}_j^n - e^{-i\xi h}\hat{u}_j^n}{2h} - \frac{V^2\tau}{2}\frac{e^{-i\xi h}\hat{u}_j^n - 2\hat{u}_j^n + e^{i\xi h}\hat{u}_j^n}{h^2} = 0 \\ &\hat{u}_j^{n+1} + \left[-1 + i\frac{V\tau}{h}\sin(\xi h) + \frac{V^2\tau^2}{h^2}\left(2 - \cos(\xi h)\right)\right]\hat{u}_j^n = 0 \\ &\hat{u}_j^{n+1} + \left[-1 + i\alpha\sin(\xi h) + \alpha^2\left(1 - \cos(\xi h)\right)\right]\hat{u}_j^n = 0 \\ &\hat{u}_j^{n+1} = \left[1 - i\alpha\sin(\xi h) + \alpha^2(\cos(\xi h) - 1)\right]\hat{u}_j^n = g(\alpha, \xi h)\hat{u}_j^n \end{aligned}$$

   Supposons $|\alpha| > 1$. Alors, pour $\xi h = \pi$, on a $g(\alpha, \pi) = 1 - i\alpha\sin(\pi) + \alpha^2(\cos(\pi) - 1) = 1 - 2\alpha^2 \leqslant -1$ et donc le schéma est instable.

Supposons $|\alpha| \leqslant 1$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
|g(\alpha,\xi h)| &= \sqrt{(1+\alpha^2(\cos(\xi h)-1))^2+\alpha^2\sin^2(\xi h)} \\
&= \sqrt{(1+\alpha^2(\cos(\xi h)-1))^2+\alpha^2(1-\cos^2(\xi h))} \\
&= \sqrt{1+\alpha^4(\cos(\xi h)-1))^2+2\alpha^2(\cos(\xi h)-1))+\alpha^2(1-\cos^2(\xi h))} \\
&= \sqrt{1+\alpha^4(\cos(\xi h)-1))^2+2\alpha^2\cos(\xi h)-2\alpha^2+\alpha^2(1-\cos^2(\xi h))} \\
&= \sqrt{1+\alpha^4(\cos(\xi h)-1))^2+\alpha^2(2\cos(\xi h)-1-\cos^2(\xi h))} \\
&= \sqrt{1+\alpha^4(\cos(\xi h)-1))^2-\alpha^2(\cos(\xi h)-1)^2} \\
&= \sqrt{1+(\alpha^4-\alpha^2)(\cos(\xi h)-1))^2} \\
&= \sqrt{1+\alpha^2(\alpha^2-1)(\cos(\xi h)-1))^2}
\end{aligned}$$

Avec $|\alpha| \leqslant 1$, on a $-1 \leqslant \alpha^2-1 \leqslant 0$, d'où $-1 \leqslant \alpha^2(\alpha^2-1) \leqslant 0$, d'où $|g(\alpha,\xi h)| \leqslant 1$. Par conséquent, le schéma est stable.

2. Exprimer matriciellement ce schéma.
   Posons $\alpha = V\dfrac{\tau}{h}$, le schéma s'écrit ainsi

$$u_j^{n+1} = \frac{\alpha^2+\alpha}{2}u_{j-1}^n + (1-\alpha^2)u_j^n + \frac{\alpha^2-\alpha}{2}u_{j+1}^n$$

- Pour $j=1$, on a $u_1^{n+1} = \frac{\alpha^2+\alpha}{2}u_0^n + (1-\alpha^2)u_1^n + \frac{\alpha^2-\alpha}{2}u_2^n = (1-\alpha^2)u_1^n + \frac{\alpha^2-\alpha}{2}u_2^n + \frac{\alpha^2+\alpha}{2}u_N^n$.
- Pour $j=N$, on a $u_N^{n+1} = \frac{\alpha^2+\alpha}{2}u_{N-1}^n + (1-\alpha^2)u_N^n + \frac{\alpha^2-\alpha}{2}u_{N+1}^n = \frac{\alpha^2-\alpha}{2}u_1^n + \frac{\alpha^2+\alpha}{2}u_{N-1}^n + (1-\alpha^2)u_N^n$.
- Pour $2 \leqslant j \leqslant N-1$, on a $u_j^{n+1} = \frac{\alpha^2+\alpha}{2}u_{j-1}^n + (1-\alpha^2)u_j^n + \frac{\alpha^2-\alpha}{2}u_{j+1}^n$.

Par conséquent, on a une formulation matricielle $U^{n+1} = M_{LW}(\alpha)U^n$ où

$$M_{LW}(\alpha) = \begin{bmatrix}
1-\alpha^2 & \frac{\alpha^2-\alpha}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\alpha^2+\alpha}{2} \\
\frac{\alpha^2+\alpha}{2} & 1-\alpha^2 & \frac{\alpha^2-\alpha}{2} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \frac{\alpha^2+\alpha}{2} & 1-\alpha^2 & \frac{\alpha^2-\alpha}{2} & \vdots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & 0 & \ddots & \frac{\alpha^2+\alpha}{2} & 1-\alpha^2 & \frac{\alpha^2-\alpha}{2} \\
\frac{\alpha^2-\alpha}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\alpha^2+\alpha}{2} & 1-\alpha^2
\end{bmatrix}.$$

4 Etude du schéma décentré amont

On se place dans le cas où $V > 0$.

1. Etudier la consistance du schéma et montrer qu'il est précis d'ordre 1 et temps et en espace.
   Le schéma décentré amont ($V > 0$) de l'EDP s'écrit ainsi

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau} + V\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h} = 0.$$

Pour montrer que ce schéma est consistant, on écrit le développement en série de Taylor en fonction de $u_j^{n+1} :\approx u(x_j, t_{n+1})$ au voisinage du point $(x_j, t_{n+1}) = (jh, (n+1)\tau)$:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\tau}{1!}\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + \frac{\tau^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) + o(\tau^2),$$

d'où

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) + o(\tau).$$

De même, on a les développements en série de Taylor en fonction de $u_j^n :\approx u(x_j, t_{n+1})$ au voisinage du point $(x_j, t_n) = (jh, n\tau)$:

$$u_{j-1}^n = u_j^n - \frac{h}{1!}\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + o(h^2)$$

d'où

$$\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) + \frac{h}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + o(h).$$

En reportant ces développements dans l'équation aux différences finies, il vient que

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) + V\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) - \frac{h}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n)\right) + o(\tau + h).$$

De l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, il vient que

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) - V\frac{h}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + o(\tau + h).$$

On peut donc écrire l'erreur de troncature sous la forme

$$E_j^n = \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) - V\frac{h}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + o(\tau + h).$$

Pour obtenir la condition permettant d'annuler les premiers termes dans la relation précédente, qui font intervenir les dérivées d'ordre supérieur $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, on dérive l'EDP$\frac{\partial u}{\partial t} - V\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ par rapport à t et on permute les dérivées en $t$et x (Ici V est une constante) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -V\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = -V\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

En utilisant le fait que u solution de l'EDP satisfait certaines conditions de régularités, alors il existe une constante $C := \max\left(\frac{V^2}{2}, \frac{V}{2}\right)\sup\limits_{x,t}|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|$, telle que

$$|E_j^n| \leqslant C(\tau + h).$$

Par passage à la limite $\tau \longrightarrow 0$ et $h \longrightarrow 0$, l'erreur de troncature tend vers 0. Le schéma numérique est ainsi consistant à l'EDP et l'erreur de troncature est d'ordre 1 en temps et en espace (l'erreur est en $o(\tau + h)$.)

2. Montrer que ce schéma est stable en norme L^∞ sous la condition CFL.
   Il suffit de vérifier si le principe du maximum discret est satisfait. Posons $\alpha = V\frac{\tau}{h}$, le schéma s'écrit ainsi
   $$u_j^{n+1} = \alpha u_{j-1}^n + (1-\alpha)u_j^n.$$
   En utilisant la combinaison convexe des coefficients du schéma ci-dessus avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, le principe du maximum discret est vérifié. par conséquent, le schéma est stable en norme L^∞ si $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

3. Présenter une formulation matricielle de ce schéma.
   Posons $\alpha = V\frac{\tau}{h}$, le schéma s'écrit ainsi
   $$u_j^{n+1} = \alpha u_{j-1}^n + (1-\alpha)u_j^n.$$
   — Pour $j = 1$, on a $u_1^{n+1} = \alpha u_0^n + (1-\alpha)u_1^n = (1-\alpha)u_1^n + \alpha u_N^n$.
   — Pour $j = N$, on a $u_N^{n+1} = \alpha u_{N-1}^n + (1-\alpha)u_N^n$.
   — Pour $2 \leqslant j \leqslant N-1$, on a $u_j^{n+1} = \alpha u_{j-1}^n + (1-\alpha)u_j^n$..
   Par conséquent, on a une formulation matricielle $U^{n+1} = M_d(\alpha)U^n$ où
   $$M_d(\alpha) = \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 1-\alpha & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}.$$