Statistiques et probabilités appliquées, TC2
Contrôle continu $n°2$, Vendredi 03 décembre 2021
Durée : 1h20
———-

A.U. : 2021-2022
Prof. H. El-Otmany

Règlement : Documents écrits, électroniques et téléphones portables interdits. Soignez votre rédaction. Numérotez les exercices, les questions traitées et vos copies en fin d'épreuve. Toute réponse doit être justifiée. Le barème est donné à titre indicatif.
Ce sujet est constitué de questions de cours et 3 exercices indépendants. Bon courage !

****

Questions de cours *[4 points, 10 min]*

1. Donner la probabilité d'un événement de Poisson $'X = k'$ avec k un entier naturel.
2. Rappeler $E(X)$ et $V(X)$ où X est une vairable aléatoire de Poisson.
3. Rappeler les conditions nécessaires pour approximer une variable aléatoire suivant loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ par une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$? Préciser λ.
4. Rappeler les conditions nécessaires pour estimer une variable binomiale de loi $\mathcal{B}(n;p)$ par une variable normale dont la loi est $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$? Préciser μ et σ.

Exercice n°1 *[6 points, 22 min]* À DUT-Techniques de Commercialisation (TC), on admet que la probabilité qu'un étudiant rate son examen est 0.04. Une promotion de DUT-TC contient 150 étudiants. On admet que ces étudiants se sont regroupés au hasard et que leurs préparation par rapport à leurs examens sont indépendants les uns des autres. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre des étudiants ayant raté leurs examens.

1. Préciser la loi de probabilité de la variable X. Calculer son espérance mathématique et sa variance.
2. Peut-on approximer la loi trouvée en question 1. par une loi de Poisson de paramètre λ à déterminer ? Justifier votre réponse.
3. Calculer l'espérance mathématique et la variance de la loi apporchée.
4. En utilisant cette loi approchée, caluler la probabilité :
   a) aucun étudiant n'a raté son examen.
   b) cinq étudiants au moins ont raté leurs examens.

Exercice n°2 *[4 points, 18 min]*

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Calculer à 10^{-4} près : $P(X \leqslant 2.45)$, $P(X \geqslant 1.42)$, $P(-1.45 \leqslant X \leqslant 1.45)$
2. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(5,2^2)$. Calculer à 10^{-4} près : $P(Y \leqslant 3.2)$, $P(Y > 7.88)$, $P(3.96 \leqslant Y \leqslant 6.02)$.

Exercice n°3 *[7 points, 30min]* En période d'épidémie de COVID-19, un laboratoire d'analyse médicale a constaté parmi les patients qui viennent faire le test que 40% d'entre eux demandent à se faire vacciner. Sur une période de deux semaines, le laboratoire table sur 300 patients qui vont faire le test. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre des patients qui demandent à être vaccinés contre COVID-19.

1. Préciser la loi de probabilité de la variable X en donnant ses paramètres.
2. Par quelle loi peut-on appoximer la loi trouvée en question 1.
3. Calculer l'espérance mathématique et la variance de la loi approchée.
4. En utilisant cette loi approchée, calculer $P(X \geqslant 70)$.
5. Calculer a tel que $P(X \leqslant a) = 90\%$. En déduire le nombre minimal de vaccins que le le laboratoire doit commander pour être sûr 90% d'en avoir assez pour ses patients pendant deux semaines.

Fin du contrôle.

Annexe à utiliser selon vos souhaits pour répondre aux exos 2,3 et 4 :

1. Table de la loi de Poisson de paramètre λ : $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

$k \backslash \lambda$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0076
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8	0,0000	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9	0,0000	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10	0,0000	0,0000	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11	0,0000	0,0000	0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0019

Exemple : $P(X = 5) = 0.1008$ pour $\lambda = 3$.

2. Table de la loi normale centrée réduite de moyenne 0 et de variance 1 : $\mathcal{N}(0, 1)$.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Exemple : $P(X \leqslant 1,51) = \Phi(1.51) = 0.9345$.