**Corrigé du contrôle continu $n°1$, Mercredi 10 Novembre 2021**
**Durée : 1h20**
——–
**DUT - TC - 2ÈME ANNÉE**

**A.U.** : 2021-2022
**Groupe** : G21
**Prof.** H. El-Otmany

---

***Outils utilisés :** formules de calcul des probabilités, les arbres de probabilité, les lois discrètes et leur propriétés. Bonne lecture !*

*******

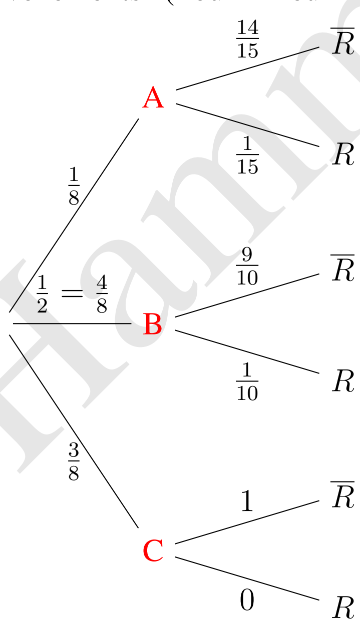
**Corrigé n°1** *[3 points]*

1. On peut former $8100$ de nombres à $4$ chiffres ne terminant pas par le chiffre $1$. En effet, on a
   — Nombre de possibilités pour le 1er chiffre : $9$ (tous les chiffres sauf $0$) ;
   — Nombre de possibilités pour le 2ème et le 3ème chiffres : $10 \times 10 = 100$ (tous les chiffres) ;
   — Nombre de possibilités pour le 4ème chiffre : $9$ (tous les chiffres sauf $4$).
   Ainsi, on a $9 \times 10 \times 10 \times 9 = 8100$ possibilités.
2. On peut former $4088$ de nombres à $4$ chiffres ne terminant pas par le chiffre $1$ et composés de chiffres deux à deux distincts. En effet, on a
   — Nombre à $4$ chiffres deux à deux distincts ($9$ possibilités pour le 1er chiffre, $9$ possibilités pour le 2ème chiffre, $8$ possibilités pour le 3ème chiffre, $7$ possibilités pour le 4ème chiffre) : $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$.
   — Nombre à $4$ chiffres terminant par le chiffre $1$ et composés de chiffres deux à deux distincts ($8$ possibilités pour le 1er chiffre, $8$ possibilités pour le 2ème chiffre, $7$ possibilités pour le 3ème chiffre, $1$ possibilité pour le 4ème chiffre) : $8 \times 8 \times 7 \times 1 = 448$.
   Ainsi, on a $4536 - 448 = 4088$ possibilités.

**Corrigé n°2** *[4 points]* Soit $A$ (respectivement $B$ et $C$) l'événement " l'étudiant emprunte l'itinéraire $A$ (respectivement $B$ et $C$). D'après l'énoncé, on a :

$$P(A) = \frac{1}{8}, \quad P(B) = \frac{1}{2}.$$

La réponse à cet exercice est basée sur le fait que $\{A, B, C\}$ est un système complet des événements (Pour mieux comprendre l'exercice, vous pouvez utiliser l'arbre de probabilités).




$P(A \cap \overline{R}) = P_A(\overline{R}) \times P(A) = \frac{14}{15} \times \frac{1}{8}$

$P(A \cap R) = P_A(R) \times P(A) = \frac{1}{15} \times \frac{1}{8}$

$P(B \cap \overline{R}) = P_B(\overline{R}) \times P(B) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{2}$

$P(B \cap R) = P_B(R) \times P(B) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{2}$

$P(C \cap \overline{R}) = P_C(\overline{R}) \times P(C) = 1 \times \frac{3}{8}$

$P(C \cap R) = P_C(R) \times P(C) = 0 \times \frac{3}{8}$

1. En utilisant la somme des probabilités des événement égale à 1, on a
$$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \frac{8-1-4}{8} = \frac{3}{8}$$
2. Soit $R$ l'événement "l'étudiant arrive en retard". D'après l'énoncé, on a
$$P_A(R) = \frac{1}{15}, \quad P_B(R) = \frac{1}{10}, \quad P_C(R) = 0$$
Ici, $P_C(R) = 0$ car si l'étudiant emprunte $C$, il n'est jamais en retard. Il faut dans la suite l'inclure dans le calcul car $P(C) = \frac{3}{8}$. On a donc
$$\begin{aligned} P(R) &= P(A \cap R) + P(B \cap R) + P(C \cap R) = P(A) \times P_A(R) + P(B) \times P_B(R) + P(C) \times P_C(R) \\ &= \frac{1}{8} \times \frac{1}{15} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{8} \times 0 \approx 0.0583 = 5.83\%. \end{aligned}$$
Ainsi, la probabilité que l'étudiant arrive en retard est $5.83\%$.
3. En utilisant la formule de Bayes (voir la fiche technique n°0), on a
$$P_R(B) = \frac{P(B \cap R)}{P(R)} = \frac{P(B) \times P_B(R)}{P(A \cap R) + P(B \cap R) + P(C \cap R)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{10}}{0.0583} \approx 0.8576 = 85.76\%$$
Ainsi, la probabilité que l'étudiant ait emprunté l'itinéraire $B$ sachant qu'il est en retard est environ $85.76\%$.

**Corrigé n°3** *[6 points]* Un livreur Uber Eats doit rendre visite à 12 clients. Il sait que la probabilité d'obtenir une commande est la même pour tous ses clients et que sa valeur est de 0.5. On admet que la décision de chaque client est indépendante des autres. Soit $X$ la variable aléatoire représentant le nombre de clients qui ont passé une commande.

1. La variable aléatoire $X$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 12; p = 0.5)$. En effet, il s'agit ici d'une expérience aléatoire admettant exactement deux issues :
   — succès : "le client passe une commande" de probabilité $p = 0.5$.
   — échec : "le client ne passe pas de commande" de probabilité $1 - p = 1 - 0.5 = 0.5$.
   Cette expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli. On répète cette expérience 12 fois de manière indépendante : il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.
   La variable aléatoire $X$ est égale au nombre au nombre de succès obtenus à l'issue de 12 épreuves de Bernoulli.
   Par conséquent, $X$ suit la loi binomiale de paramètre $n = 12$ et $p = 0.5$.
2. $P(X = 3) = C_{12}^3 \times 0.5^3 \times (1 - 0.5)^{12-3} = 220 \times 0.5^3 \times 0.5^9 \approx 0.0537$ Ainsi, la probabilité pour que le livreur obtient exactement trois commandes est $5.37\%$.
3. $P(X = 0) = C_{12}^0 \times 0.5^0 \times (1 - 0.5)^{12-0} = 0.5^{12} \approx 0.00024$. Ainsi, la probabilité pour que le livreur n'obtient aucune commande est $0.024\%$ environ.
4. $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - C_{12}^0 \times 0.5^0 \times (1 - 0.5)^{12-0} - C_{12}^1 \times 0.5^1 \times (1 - 0.5)^{12-1} = 1 - 0.00024 - 0.00293 \approx 0.9968$. Ainsi, la probabilité d'avoir deux commandes est $99.68\%$.
5. En utilisant la définition du cours, on a
$$E(X) = np = 12 \times 0.5 = 6, \quad V(X) = np(1 - p) = 12 \times 0.5 \times (1 - 0.5) = 6 \times 0.5 = 3.$$

**Corrigé n°4** *[7 points]* Soit $A$ la variable aléatoire égale au nombre d'appartements vendus en une semaine après une visite.

1. La variable aléatoire $A$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 20; p = 0.05)$. En effet, il s'agit ici d'une expérience aléatoire admettant exactement deux issues :
   — succès : "vendre un appartement suite à une visite" de probabilité $p = 0.05$.
   — échec : "ne pas vendre un appartement suite à une visite" de probabilité $1-p = 1-0.05 = 0.95$.
   Cette expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli. On répète cette expérience 20 fois de manière indépendante : il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.
   La variable aléatoire $A$ est égale au nombre d'appartements vendus en une semaine après une visite, c'est-à-dire au nombre de succès obtenus à l'issue de 20 épreuves de Bernoulli.
   Par conséquent, $A$ suit la loi binomiale de paramètre $n = 20$ et $p = 0.05$.
2. Si $25\%$ des visites hebdomadaires se traduisent par une vente, cela signifie que l'agent immobilier a vendu $25\% \times 20 = 5$ appartements sur la semaine. La probabilité s'écrit ainsi
   $P(A = 5) = C_{20}^{5} \times 0.05^5 \times (1 - 0.05)^{20-5} \approx 0.00224$, soit une probabilité de $0.224\%$ environ pour que $25\%$ des visites hebdomadaires se traduisent par une vente.
3. $P(A \geqslant 1) = 1 - P(A < 1) = 1 - P(A = 0) = 1 - C_{20}^{0} \times 0.05^0 \times (1 - 0.05)^{20-0} = 1 - 0.95^{20} \approx 0.6415$, soit une probabilité de $64.15\%$ environ pour que l'agent vende au moins un appartement par semaine.
4. $E(A) = n \times p = 20 \times 0.05 = 1$, l'agent vend en moyenne $1$ appartement.
5. $V(A) = n \times p \times (1 - p) = 20 \times 0.05 \times (1 - 0.05) = 0.95$ et $\sigma_A = \sqrt{V(A)} \approx 0.9747 \approx 0.975$.
6. Soit $AI$ la variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p = 0.05)$ où $n$ est le nombre d'appartements visités en une semaine. On souhaite déterminer la valeur de $n$ tel que $P(AI \geqslant 1) \geqslant 0.95$ :

$$\begin{aligned}
P(AI \geqslant 1) \geqslant 0.95 &\Leftrightarrow 1 - P(AI < 1) \geqslant 0.95 \\
&\Leftrightarrow 1 - P(AI = 0) \geqslant 0.95 \\
&\Leftrightarrow 1 - C_n^0 \times 0.05^0 \times (1 - 0.05)^{n-0} \geqslant 0.95 \\
&\Leftrightarrow 1 - 0.95^n \geqslant 0.95 \\
&\Leftrightarrow 1 - 0.95 \geqslant 0.95^n \\
&\Leftrightarrow 0.05 \geqslant 0.95^n.
\end{aligned}$$

   En utilisant la fonction logarithme népérienne (ln), on obtient

$$\ln(0.05) \geqslant \ln(0.95^n) = n \times \ln(0.95)$$

   Comme $\ln(0.95) < 0$ (on change le sens de l'inégalité lors de la division), il vient que

$$n \geqslant \frac{\ln(0.05)}{\ln(0.95)} \approx 58.40$$

   Pour que l'agent immobilier atteint son objectif, il doit effectuer au moins $58$ visites par semaine.

FIN DE LA CORRECTION.