STATISTIQUES ET PROBABILITÉS APPLIQUÉES, TC2
Contrôle continu $n°2$, Vendredi 03 décembre 2021
Durée : 1h20
——–

A.U. : 2021-2022
Prof. H. El-Otmany

Questions de cours *[4 points, 10 min]*

1. Donner la probabilité d'un événement de Poisson $'X = k'$ avec k un entier naturel.
   Pour un événement de Poisson de paramètre λ, on a $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ avec k un entier naturel.
2. Rappeler $E(X)$ et $V(X)$ où X est une variable aléatoire de Poisson.
   Pour un événement de Poisson dont le paramètre est λ, on a $E(X) = V(X) = \lambda$.
3. Rappeler les conditions nécessaires pour approximer une variable aléatoire suivant loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ par une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$? Préciser λ.
   Avec les conditions $n \geqslant 30$, $0 \leqslant p \leqslant 0.1$ et $np < 10$, nous pouvons approximer une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ par une variable suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.
4. Rappeler les conditions nécessaires pour estimer une variable binomiale de loi $\mathcal{B}(n; p)$ par une variable normale dont la loi est $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$? Préciser μ et σ.
   Avec les conditions $n \geqslant 20$, $np \geqslant 10$ et $n(1-p) \geqslant 10$, nous pouvons approximer une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ par une variable suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ avec $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

Exercice n°1 *[6 points, 22 min]* À DUT-Techniques de Commercialisation (TC), on admet que la probabilité qu'un étudiant rate son examen est 0.04. Une promotion de DUT-TC contient 150 étudiants. On admet que ces étudiants se sont regroupés au hasard et que leurs préparation par rapport à leurs examens sont indépendants les uns des autres. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre des étudiants ayant raté leurs examens.

1. Préciser la loi de probabilité de la variable X. Calculer son espérance mathématique et sa variance.
   C'est une expérience aléatoire admettant deux issues :
   — succès : "étudiants ayant ratés leurs examens" dont la probabilité est $p = 0.04$
   — échec : "étudiants n'ayant pas ratés leurs examens" dont la probabilité est $1 - p = 0.96$.
   Cette expérience se répète $n = 150$ de manière identique et indépendante, donc c'est un schéma de Bernoulli. Par conséquent, cette expérience peut être donc modélisée par une loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $p = 0.04$. Si X la variable aléatoire associée au nombre de succès, c'est-à-dire le nombre des étudiants ayant ratés leurs examens, alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(150; 0.04)$.
   On a donc $E(X) = np = 6$ et $V(X) = np(1-p) = 5.76$.
2. Peut-on approximer la loi trouvée en question 1. par une loi de Poisson de paramètre λ à déterminer ? Justifier votre réponse.
   Comme $X \hookrightarrow \mathcal{B}(150; 0.04)$ et les conditions $n = 150 \geqslant 30$, $0 \leqslant p = 0.04 \leqslant 0.1$ et $np = 150 \times 0.04 = 6$ sont satisfaites, alors nous pouvons approcher la loi $\mathcal{B}(150; 0.04)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = np = 6$.
3. Calculer l'espérance mathématique et la variance de la loi approchée.
   Soit Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = np = 6$. Alors, $E(Y) = \lambda = 6$ et $V(Y) = \lambda = 6$.
4. En utilisant cette loi approchée, calculer la probabilité :
   a) aucun étudiant n'a raté son examen.
      Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(6)$. En utilisant la table de Poisson et la loi approchée, on a

$$P(X = 0) \approx P(Y = 0) = \frac{6^0}{0!}e^{-6} \approx 0.0025.$$

Ainsi, la probabilité qu'aucun étudiant n'a raté son examen est 0.25% environ.

b) cinq étudiants au moins ont raté leurs examens.
Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(6)$. En utilisant la table de Poisson et la loi approchée, on a

$$\begin{aligned}
P(X \geqslant 5) \approx P(Y \geqslant 5) = 1 - P(Y < 5) &= 1 - P(Y \leqslant 4) \\
&= 1 - [P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3) + P(Y=4)] \\
&= 1 - [0.0025 + 0.0149 + 0.0446 + 0.0892 + 0.1339] \approx 0.7149
\end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité que cinq étudiants au moins ont raté leurs examens est 71.49% environ.

Exercice n°2 *[4 points, 18 min]*

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Calculer à 10^{-4} près : $P(X \leqslant 2.45)$, $P(X \geqslant 1.42)$, $P(-1.45 \leqslant X \leqslant 1.45)$.
Ici, la variable aléatoire X suit $\mathcal{N}(0,1)$, donc , on utilise directement les formules de calcul de probabilité d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite et sa table. On a

$$\begin{aligned}
P(X \leqslant 2.45) &= \Phi(2.45) \approx 0.9929; \\
P(X \geqslant 1.42) &= 1 - P(X < 1.42) = 1 - \Phi(1.42) \approx 1 - 0.9222 \approx 0.0778; \\
P(-1.45 \leqslant X \leqslant 1.45) &= 2\Phi(1.45) - 1 \approx 2 \times 0.9265 - 1 \approx 0.8530.
\end{aligned}$$

2. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(5, 2^2)$. Calculer à 10^{-4} près : $P(Y \leqslant 3.2)$, $P(Y > 7.88)$, $P(3.96 \leqslant Y \leqslant 6.02)$.
Ici, la variable aléatoire suit une loi normale $\mathcal{N}(5, 2^2)$ de moyenne $\mu \neq 0$ et variance $\sigma^2 \neq 1$, donc on effectue d'abord la transformation $\dfrac{Y-\mu}{\sigma} = \dfrac{Y-5}{2}$ pour avoir une variable centrée réduite. Ensuite, on applique les formules de calcul pour une variable centrée réduite. On note X la variable suivant la loi centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$. On a donc

$$\begin{aligned}
P(Y \leqslant 3.2) &= P\left(\frac{Y-5}{2} \leqslant \frac{3.2-5}{2}\right) = P\left(X \leqslant -0.9\right) = P(X \geqslant 0.9) \\
&= 1 - P(X < 0.9) = 1 - P(X \leqslant 0.9) = 1 - \Phi(0.9) \approx 1 - 0.8159 \approx 0.1841; \\
P(Y > 7.88) &= P\left(\frac{Y-5}{2} > \frac{7.88-5}{2}\right) = P\left(X > 1.44\right) = 1 - P\left(X \leqslant 1.44\right) = 1 - \Phi(1.44) \\
&\approx 1 - 0.9251 \approx 0.0749; \\
P(3.96 \leqslant Y \leqslant 6.02) &= P\left(\frac{3.96-5}{2} \leqslant \frac{Y-5}{2} \leqslant \frac{6.02-5}{2}\right) = P\left(-0.52 \leqslant \frac{Y-5}{2} \leqslant 0.51\right) \\
&= P\left(-0.52 \leqslant X \leqslant 0.51\right) = \Phi(0.51) - \Phi(-0.52) = \Phi(0.51) - (1 - \Phi(0.52)) \\
&= \Phi(0.51) + \Phi(0.52) - 1 \approx 0.6950 + 0.6985 - 1 \approx 0.3935.
\end{aligned}$$

Exercice n°3 *[7 points, 30min]* En période d'épidémie de COVID-19, un laboratoire d'analyse médicale a constaté parmi les patients qui viennent faire le test que 40% d'entre eux demandent à se faire vacciner. Sur une période de deux semaines, le laboratoire table sur 300 patients qui vont faire le test. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre des patients qui demandent à être vaccinés contre COVID-19.

1. Préciser la loi de probabilité de la variable X en donnant ses paramètres.
C'est une expérience aléatoire admettant deux issues :

— succès : "patients demandent à être vaccinés contre COVID-19" dont la probabilité est $p = 0.4$
— échec : "patients ne demandent pas à être vaccinés contre COVID-19" dont la probabilité est $1 - p = 0.6$.

Cette expérience se répète $n = 300$ de manière identique et indépendante (arrivé des patients au laboratoire), donc c'est un schéma de Bernoulli. Par conséquent, cette expérience peut être donc modélisée par une loi binomiale de paramètres $n = 300$ et $p = 0.4$. Si X la variable aléatoire associée au nombre de succès, c'est-à-dire le nombre des patients qui demandent à être vaccinés contre COVID-19, alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(300; 0.4)$.

2. Par quelle loi peut-on approximer la loi trouvée en question 1.
Comme $X \hookrightarrow \mathcal{B}(300; 0.4)$ et les conditions $n = 300 \geqslant 20$, $np = 300 \times 0.4 = 120 \geqslant 10$ et $n(1 - p) = 300 \times (1 - 0.4) = 180$ sont satisfaites, alors nous pouvons approcher la loi $\mathcal{B}(300; 0.4)$ par la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ avec $\mu = np = 300 \times 0.4 = 120$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{120(1 - 0.4)} = \sqrt{72}$.

3. Calculer l'espérance mathématique et la variance de la loi approchée.
Soit Y une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ avec $\mu = np = 300 \times 0.4 = 120$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{120(1 - 0.4)} = \sqrt{72}$. Alors, $E(Y) = \mu = 120$ et $V(Y) = \sigma^2 = 72$.

4. En utilisant cette loi approchée, calculer $P(X \geqslant 70)$.
Soit Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$. En utilisant la loi approchée et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(120; \sqrt{72}^2)$, et on fait une correction de continuité :

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 70) \approx P(Y \geqslant 69.5) &= P\left(\frac{Y - 120}{\sqrt{72}} \geqslant \frac{69.5 - 120}{\sqrt{72}}\right) = P\left(Z \geqslant \frac{-50.5}{\sqrt{72}}\right) = P(Z \geqslant -5.95) \\ &= P(Z \leqslant 5.95) = \Phi(5.95) \approx 0.99999. \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité que plus de 70 patients demandent à se faire vacciner est 99.999% environ.

5. Calculer a tel que $P(X \leqslant a) = 90\%$. En déduire le nombre minimal de vaccins que le le laboratoire doit commander pour être sûr 90% d'en avoir assez pour ses patients pendant deux semaines. Soit Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$. En utilisant la loi approchée et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(120; \sqrt{72}^2)$, on a

$$P(X \leqslant a) \approx P(Y \leqslant a) = P\left(\frac{Y - 120}{\sqrt{72}} \leqslant \frac{a - 120}{\sqrt{72}}\right) = P\left(Z \leqslant \frac{a - 120}{\sqrt{72}}\right) = \Phi\left(\frac{a - 120}{\sqrt{72}}\right) = 0.90$$

Comme $0.9 \geqslant 0.5$ alors $\dfrac{a - 120}{\sqrt{72}} \geqslant 0$. En lisant la table à l'envers,on en déduit que

$$\frac{a - 120}{\sqrt{72}} \approx 1.29.$$

Par un calcul simple, on trouve $a = 1.29 \times \sqrt{72} + 120 = 130.94$.
par conséquent, le nombre minimal de vaccins que le le laboratoire doit commander pour être sûr 90% d'en avoir assez pour ses patients pendant deux semaines est environ 131 vaccins.

FIN DU CORRIGÉ.

Annexe à utiliser selon vos souhaits pour répondre aux exos 2,3 et 4 :

1. Table de la loi de Poisson de paramètre λ : $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

$k \backslash \lambda$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0076
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8	0,0000	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9	0,0000	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10	0,0000	0,0000	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11	0,0000	0,0000	0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0019

Exemple : $P(X = 5) = 0.1008$ pour $\lambda = 3$.

2. Table de la loi normale centrée réduite de moyenne 0 et de variance 1 : $\mathcal{N}(0, 1)$.

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Exemple : $P(X \leqslant 1,51) = \Phi(1.51) = 0.9345$.