
Corrigé n°1 Pour réaliser le montage d'un système électronique, on dispose de résistances issues d'une production importante, où l'on sait que le pourcentage P de résistances défectueuses est de 0.05. On doit utiliser 4 résistances.

1. Quelle est la probabilité d'en avoir 3 de mauvaises ?
   Il s'agit d'une expérience aléatoire ademttant deux issues :
   — succès : "avoir des résistences défectueuses" de probabilité $p = 0.05$
   — échec : "ne pas avoir des résistences défectueuses" de probabilité $1 - p = 1 - 0.05 = 0.95$.
   Nous pouvons utiliser les arbres de probabilité pour répondre à cet exercice. Soit X le nombre de résistances défectueuses. Donc
   $P(X = 3) = C_4^3 \times 0.05^3 \times (1 - 0.05)^{4-3} = 4 \times 0.05^3 \times 0.95 = 0.0005$.
2. Quelle est la probabilité d'en avoir un nombre inférieur ou égal à 3 de mauvaises ?

$$P(X \leqslant 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \sum_{k=0}^{3} C_4^k \times 0.05^k \times (1 - 0.05)^{4-k}$$
$$= C_4^0 \times 0.05^0 \times (1 - 0.05)^{4-0} + C_4^1 \times 0.05^1 \times (1 - 0.05)^{4-1} + C_4^2 \times 0.05^2 \times (1 - 0.05)^{4-2} + C_4^3 \times 0.05^3 \times (1 - 0.05)^{4-3} = \approx 0.999.$$

On peut aussi répondre directement à cette question en utilisant la complémentarité :

$$P(X \leqslant 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - P(X = 4) = 1 - C_4^4 \times 0.05^4 \times (1 - 0.05)^{4-4} \approx 0.999.$$

Corrigé n°2 Une compagnie d'assurance souhaite réévaluer ses tarifs pour s'assurer un minimum de profits. À l'aide de données statistiques, elle a pu établir les risques (en terme d'indemnisations annuelles) suivants :

Probabilité	Indemnisation en euros par an
0.45	0
0.15	200
0.25	1000
0.10	2000
0.05	5000

On note I la variable aléatoire égale à l'indemnisation annuelle versée à un client.

1. Calculer la probabilité qu'un client ait une indemnisation d'au plus 1000 euros sur une année.
   $P(I \leqslant 1000) = p(I = 0) + P(I = 200) + P(I = 1000) = 0.45 + 0.15 + 0.25 = 0.85$.
2. Calculer le montant de l'indemnisation annuelle moyenne.
   $E(I) = (0 \times 0.45) + (200 \times 0.15) + (1000 \times 0.25) + (2000 \times 0.1) + (5000 \times 0.05) = 730$€.
3. Cette compagnie décide de fixer les cotisations annuelles à 700 euros. A-t-elle raison ?
   La compagnie a tort car l'indemnisation moyenne est supérieure à la cotisation annuelle. Si elle continue dans la même stratégie, elle sera déficitaire.

4. Cette compagnie souhaite générer un profit moyen de 100 euros par an et par client ? Quel montant de cotisation annuelle devra-t-elle alors fixer ?
Pour générer un profit de 100€par an et par client, la compagnie devra fixer les cotisations annuelles à $E(I) + 100 = 730 + 100 = 830$€.

Corrigé n°3 Un sac contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et 7 boules jaunes. On tire simultanément 2 boules du sac et on suppose que les tirages sont équiprobables. On considère les événements suivants :

— A : obtenir 2 boules de la même couleur.
— B : obtenir 2 boules de couleurs différentes.

1. Calculer les probabilités des événements A et B.
L'univers Ω est l'ensemble des tirages simultanées de 2 boules parmi 14. Donc

$$card(\Omega) = C_{14}^2 = \frac{14!}{2! \times (14-2)!} = \frac{14 \times 13}{2} = 91.$$

— L'événement A (obtenir 2 boules de la même couleur) est égal à la réunion des événements disjoints : (obtenir 2 boules rouges) ou (obtenir 2 boules vertes) ou (obtenir 2 boules jaunes). En utilisant l'équiprobabilité, on obtient

$$P(A) = \frac{C_4^2 + C_3^2 + C_7^2}{C_{14}^2} = \frac{30}{91}.$$

— L'événement B est le complémentaire dans Ω de A. On a donc

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{30}{91} = \frac{61}{91}.$$

On répète 10 fois l'épreuve précédente en remettant les 2 boules tirées dans le sac, après chaque tirage. Donc, les 10 épreuves aléatoires élémentaires sont indépendantes. À chaque partie de 10 épreuves, on note X la variable aléatoire associée au nombre de fois où l'événement A est réalisé.

2 Expliquer pourquoi X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10; \frac{30}{91})$.
En utilisant le fait que X est une variable aléatoire associée au nombre de fois où l'événement A est réalisé, on a

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}.$$

avec X_i la variable aléatoire définie par $X_i(A) = 1$ et $X_i(B) = 0$, $0 \leqslant i \leqslant 10$.
Par conséquent, la variable aléatoire X_i suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{30}{91})$ et on note $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{30}{91})$.
Or, X est une somme de 10 variables de Bernoulli qui sont indépendantes deux à deux, donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{30}{91}$. On note

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n = 10; p = \frac{30}{91}\right)$$

3 Donner une loi de probabilité de X.
Pour établir la loi de probabilité de X, il suffit d'appliquer la formule suivante : $P(X = k) = C_{10}^k \times \left(\frac{30}{91}\right)^k \times \left(1 - \frac{30}{91}\right)^{10-k}$ avec $k = 0, 1, \ldots, 10$.

k	$P(X=k)$	k	$P(X=k)$
0	$C_{10}^{0}\left(\frac{30}{91}\right)^{0}\left(1-\frac{30}{91}\right)^{10}\approx 0.0183$	6	$C_{10}^{6}\left(\frac{30}{91}\right)^{6}\left(1-\frac{30}{91}\right)^{4}\approx 0.0544$
1	$C_{10}^{1}\left(\frac{30}{91}\right)^{1}\left(1-\frac{30}{91}\right)^{9}\approx 0.0901$	7	$C_{10}^{7}\left(\frac{30}{91}\right)^{7}\left(1-\frac{30}{91}\right)^{3}\approx 0.0153$
2	$C_{10}^{2}\left(\frac{30}{91}\right)^{2}\left(1-\frac{30}{91}\right)^{8}\approx 0.1994$	8	$C_{10}^{8}\left(\frac{30}{91}\right)^{8}\left(1-\frac{30}{91}\right)^{2}\approx 0.0028$
3	$C_{10}^{3}\left(\frac{30}{91}\right)^{3}\left(1-\frac{30}{91}\right)^{7}\approx 0.2615$	9	$C_{10}^{9}\left(\frac{30}{91}\right)^{9}\left(1-\frac{30}{91}\right)^{1}\approx 0.0003$
4	$C_{10}^{4}\left(\frac{30}{91}\right)^{4}\left(1-\frac{30}{91}\right)^{6}\approx 0.2250$	10	$C_{10}^{10}\left(\frac{30}{91}\right)^{0}\left(1-\frac{30}{91}\right)^{0}\approx 0.00001$
5	$C_{10}^{5}\left(\frac{30}{91}\right)^{5}\left(1-\frac{30}{91}\right)^{5}\approx 0.1328$	Total	$\sum_{k=0}^{10} P(X=k)=1$

4 Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X. Donner une explication à $E(X)$.
$E(X) = n\times p = 14\times\frac{30}{91}\approx 4.615\approx 5.0$. En moyenne, on tire 5 boules environ ayant la même couleur.

5 Calculer la variance $V(X)$ de X et déduire son écart type σ_X. $V(X) = n\times p\times(1-p) = 14\times\frac{30}{91}\times\left(1-\frac{30}{91}\right)\approx 3.094$ et $\sigma_X=\sqrt{V(X)}\approx 1.759$.

Corrigé n°4 Un agent immobilier a estimé que la probabilité de vendre un appartement suite à une visite était à 9%. Elle effectue en général 30 visites par semaine. On considère que les visites de l'appartement sont des variables aléatoires indépendantes les unes des autres. On note A la variable aléatoire égale au nombre d'appartements vendus en une semaine après une visite.

1. justifier que la variable A suit une loi binomiale. Il s'agit d'une expérience aléatoire admettant exactement deux issues :
   — succès : "vendre un appartement suite à une visite" de probabilité $p = 0.09$.
   — échec : "ne pas vendre un appartement suite à une viste" de probabilité $1-p = 1-0.09 = 0.91$.
   Cette expérience aléatoire (EA) est une épreuve de Bernoulli. On répète cette EA 30 fois de manière indépendante : il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.
   La variable aléatoire A est égale au nombre d'appartements vendus en une semaine après une visite, c'est-à-dire au nombre de succès obtenus à l'issue de 30 épreuves de Bernoulli.
   Par conséquent, A suit la loi binomiale de paramètre $n = 30$ et $p = 0.09$ et on note $A\hookrightarrow\mathcal{B}(n=30; p=0.09)$.
2. Calculer la probabilité que 20% des visites hebdomadaires se traduisent par une vente.
   Si 20% des visites hebdomadaires se traduisent par une vente, cela signifie que l'agent immobilier a vendu $20\%\times 30 = 6$ appartements sur la semaine. La probabilité s'écrit ainsi
   $P(A=5) = C_{30}^{5}\times 0.09^{5}\times(1-0.09)^{30-5}\approx 0.0796$, soit 7.96% environ.
3. Calculer la probabilité que l'agent vende au moins un appartement par semaine.
   $P(A\geqslant 1) = 1-P(A<1) = 1-P(A=0) = 1-C_{30}^{0}\times 0.09^{0}\times(1-0.09)^{30-0} = 0.91^{30}\approx 0.0591$, soit 5.91% environ.
4. Combien l'agent vend-t-il d'appartements en moyenne par semaine ?
   $E(A) = n\times p = 30\times 0.09 = 2.7$, l'agent vend en moyenne 2.7 appartements.
5. Calculer l'écart-type de A.
   $V(A) = n\times p\times(1-p) = 30\times 0.09\times(1-0.09) = 2.457$ et $\sigma_A=\sqrt{V(A)}\approx 1.567$.
6. Combien de visites 'agent doit-il effectuer au minimum (par semaine) pour que la probabilité de vendre au moins un appartement (par semaine) soit supérieure à 95% ?

Soit AI la variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p = 0.09)$ où n est le nombre d'appartements visités en une semaine. On souhaite déterminer la valeur de n tel que $P(AI \geqslant 1) \geqslant 0.95$. On a

$$P(AI \geqslant 1) \geqslant 0.95 \Leftrightarrow 1 - P(AI < 1) \geqslant 0.95 \Leftrightarrow 1 - P(AI = 0) \geqslant 0.95 \Leftrightarrow 1 - 0.91^n \geqslant 0.95$$
$$\Leftrightarrow 1 - 0.95 \geqslant 0.91^n \Leftrightarrow 0.05 \geqslant 0.91^n.$$

En utilisant la fonction logarithme népérienne (ln), on obtient

$$\ln(0.05) \geqslant \ln(0.91^n) = n \times \ln(0.91)$$

Comme $\ln(0.91) < 0$ (on change le sens de l'inégalité lors de la division), il vient que

$$n \geqslant \frac{\ln(0.05)}{\ln(0.91)} 31.764 \approx 31.8.$$

Pour que l'agent immobilier attient son objectif, il doit effectuer au moins 32 visites par semaine.

Corrigé n°5 Le rayon fruits d'une enseigne de grande distribution propose 24 espèces de fruits, dont 8 sont de label bio. Un contrôle consiste à choisir au hasard 10 espèces de fruits différentes. La variable aléatoire X donne le nombre d'espèces bio sélectionnées, parmi les 8.

1. Donner, en justifiant, la loi de probabilité de X. Il s'agit d'une expérience aléatpoire à deux issues pour une espèce sélectionnée : bio (succès) ou pas bio (échec) ; $a = 8$, $N = 24$. Les dix espèces à sélectionner doivent être différentes, donc nous avons un tirage sans remise $n = 10$. On désigne par X la variable aléatoire qui comptabilise les succès au bout de 10 essais. Par conséquent, X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(10; 8; 24)$.
2. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.
$$E(X) = \frac{10 \times 8}{24} \approx 3.333\,\texttt{espèce bio}$$
$$V(X) = \frac{10 \times 8}{24} \times \frac{16}{24} \times \frac{14}{23} \approx 1.353, \quad \sigma_X = \sqrt{V(X)} \approx 1.163\,\texttt{espèce bio}.$$
3. Quelle est la probabilité que moins de deux espèces sélectionnées soient bio ?
$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,004 + 0,047 = 0,051.$

Corrigé n°6 L'oral des grandes écoles comporte au total 150 sujets ; les candidats CPGE tirent au sort quatre sujets et choisissent alors le sujet traité parmi ces quatre sujets. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur les 150. Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé :
Pour un sujet sélectionné, il y a deux issues : il a été révisé (succès) ou pas (échec). On effectue un tirage sans remise de trois sujets. $a = 60$, $N = 100$, $n = 3$. On note X la variable aléatoire qui compte les succès au bout de 3 essais. Donc, X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(4; 60; 150)$.

1. les quatre sujets tirés ?
$P(X = 4) = \dfrac{C_{60}^4 \times C_{90}^0}{C_{150}^4} = \dfrac{487635 \times 1}{20260275} \approx 0.0241.$
2. exactement deux sujets sur les quatre sujets ?
$P(X = 2) = \dfrac{C_{60}^2 \times C_{90}^2}{C_{150}^4} = \dfrac{1770 \times 4005}{20260275} \approx 0.3499.$

3. aucun des quatre sujets ?
$P(X=0) = \dfrac{C_{60}^{0} \times C_{90}^{4}}{C_{150}^{4}} = \dfrac{1 \times 2555190}{20260275} \approx 0.1261.$

Corrigé n°7 Un automobiliste rencontre sur son trajet 5 feux tricolores à la suite, identiques dans leurs durées : le feu vert dure 40 secondes, le feu orange/rouge dure 20 secondes. Malheureusement, ces feux ne sont pas synchronisés, et l'état de l'un n'a aucune influence sur l'état du suivant.

1. Lorsque l'automobiliste arrive au niveau du premier feu, quelle est la probabilité que celui-ci soit vert ?
Sur une plage d'une minute, le feu vert V dure les deux tiers du temps. À un instant quelconque indéterminé, le feu a deux chances sur trois d'être vert. Donc $P(F=V) = \frac{2}{3} \approx 0.032$.
2. Déterminer la probabilité pour que, dans son trajet, il ait rencontré tous les feux au vert.
On répète 5 fois de suite la même expérience. À chaque fois, la probabilité de succès est $P(F = V) = \frac{2}{3} \approx 0.032$. On considère la variable aléatoire X associé au nombre de succès (feux verts) sur 5 tentatives. Donc X suit la loi binomiale de paramètre $n=5$ et $p = \frac{2}{3}$. On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n = 5; p = \frac{3}{3})$. Par conséquent : $P(X=5) = C_5^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(1-\frac{2}{3}\right)^{5-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \approx 0.132$.
3. Quelle est la probabilité pour qu'il ait eu un et un seul feu rouge ? Au moins deux feux rouges ?
$P(X=4) = C_5^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(1-\frac{2}{3}\right)^{5-4} = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 \approx 0.329$;
$P(X \leqslant 3) = 1 - P(X=4) - P(X=5) \approx 0.539$.
4. A combien de feux verts peut-il s'attendre, en moyenne, à chaque trajet ?
$E(X) = n \times p = 5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \approx 3.333$ feux verts environ, en moyenne.

Corrigé n°8 D'après un sondage, 85% des acheteurs d'un produit A se déclarent satisfaits. Sur un groupe de 10 acheteurs du produit, choisis au hasard, quelle est la probabilité que :

1. Tous soient satisfaits ? Il s'agit d'une expérience aléatoire à deux issues : succès (acheteur interrogé est satisfait) et échec (acheteur interrogé n'est pas satisfait). Les acheteurs sont interrogés selon le mode d'un tirage sans remise (p non constant). Sur 10 acheteurs interrogés, on associe à la variable aléatoire X le nombre d'acheteurs satisfaits.
Donc X est distribuée par la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(10; ?; ?)$, qui ne peut pas être utilisée (des paramètres sont inconnus).
On supposera que $N > 20 \times n$, ce qui nous autorise à considérer la probabilité de succès à chaque essai comme constante (et donc égale à 0.85) et à utiliser la loi $\mathcal{B}(n = 10; p = 0.85)$. $P(X = 10) = C_{10}^{10} \times 0.85^{10} \times (1-0.85)^{10-10} = 1 \times 0.85^{10} \times 1 \approx 0.1969$.
2. 85% soient satisfaits ?
On a $85\% \times 10 = 8.5$ donc, on peut calculer la probabilité pour $k = 9$ $P(X=9) = C_{10}^{9} \times 0.85^9 \times (1-0.85)^1 \approx 0.3472$.
3. Au moins 85% soient satisfaits ?
$P(X \geqslant 9) = P(X=9) + P(X=10) \approx 0.5441$.
4. Au plus 85% soient satisfaits ?
$P(X \leqslant 9) = 1 - P(X > 9) = 1 - P(X=10) = 1 - 0.1969 \approx 0.8031$.