Corrigé n°1 Toutes les nuits, Lina observe les étoiles filantes dans le ciel. Ces deux dernières nuits, elle en a vu sept au total, ce qui semble être, selon ses observations, une bonne moyenne de ce qu'elle voit habituellement.
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'étoiles filantes vues par Lina au cours d'une nuit. Le passage d'une étoile filante étant un phénomène rare, on admet que X suit une loi de Poisson.

1. Préciser le paramètre de la loi de X.
   Lina a vu 7 étoiles filantes dans le ciel au cours des deux dernières nuits, soit une moyenne $\frac{7}{2} = 3.5$ étoiles filantes par nuit. Donc $X \hookrightarrow \mathcal{P}(3.5)$.
2. Déterminer la probabilité que Lina voie cinq étoiles dans le ciel au cours d'une nuit.
   $P(X = 5) = e^{-3.5}\frac{3.5^5}{5!} \approx 0.1322$.
3. Déterminer la probabilité que Lina voie au moins une étoile dans le ciel au cours d'une nuit.
   $P(X \geqslant 1)) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-3.5}\frac{3.5^0}{0!} \approx 0.9698$.
4. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et σ_X.
   $E(X) = 3.5$, $V(X) = 3.5$ et $\sigma_X = \sqrt{3.5} \approx 1.871$.

Corrigé n°2 Un agent immobilier a estimé que la probabilité de vendre un appartement suite à une visite était 7%. Il effectue en général 120 visites par mois.
On considère que les visites d'appartements sont des expériences aléatoires indépendantes les unes des autres. On appelle A la variable aléatoire égale au nombre d'appartement vendus en un mois après une visite.

1. Préciser la loi de la variable aléatoire A en donnant ses paramètres.
   Il s'agit d'une expérience aléatoire admettant deux issues :
   — succès : "vendre un appartement suite à une visite" de probabilité $p = 0.07$.
   — échec : "ne pas vendre un appartement suite à une visite" de probabilité $1-p = 1-0.07 = 0.93$.
   Cette expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli. On répète cette expérience 120 fois de manière indépendante. Donc, c'est un schéma de Bernoulli.
   On note A la variable aléatoire associé au nombre d'appartement vendus après une visite en un mois, c'est-à-dire au nombre de succès obtenus à l'issue des 120 épreuves de Bernoulli. Par conséquent A suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 120; p = 0.07)$.
2. On souhaite calculer la probabilité que l'agent vende dix appartements en un mois après une visite.
   a) Calculer C_{120}^{10} à l'aide de la calculatrice.
   À l'aide de la calculatrice, one gets :
   $$C_{120}^{10} = 1.1606817863878 \times 10^{14}.$$
   Ce nombre est difficile à obtenir car il fait intervenir des factorielles importantes et la calculatrice nous donne qu'une valeur approchée (en réalité $C_{120}^{10} = 116068178638776$). De même, pour les valeurs 0.07^{10} et $(1-0.07)^{110}$ qui interviennent dans le calcul de $P(A = 10)$. Pour cela, nous proposons d'approcher la loi de A par une loi convenable.
   b) Justifier que l'on peut approcher la loi de A par une loi de Poisson que l'on précisera.
   Comme $n = 120 \geqslant 30$, $p = 0.07 \leqslant 0.1$ et $np = 120 \times 0.07 = 8.4 < 10$, on peut donc approcher la loi de A par une loi de Poisson $\mathcal{P}(8.4)$ et on note $A \hookrightarrow \mathcal{P}(-8.4)$.
   c) À l'aide de cette approximation, calculer la probabilité voulue.
   On a $P(X = 10) \approx P(A' = 10) = e^{-8.4} \times \frac{8.4^{10}}{10!} \approx 0.1084$.

Corrigé n°3 Dans une entreprise de fabricarion des masques chirurigicaux, une étude statistique a montré qu'en moyenne 5% des masques d'une chaîne de fabrication présentent des défauts. Lors d'un contrôle de qualité, on envisage de prélever un échantillon de 120 masques. Bien que ce prélévement soit exhaustif (sans remise), on considére que la production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler cette épreuve à un tirage avec remise et que la probabilité qu'un masque prélevé soit défectueux est constante.

1. Justifier que la loi de la variable aléatoire X donnant le nombre d'articles défectueux d'un tel échantillon peut être approchée par la loi de Poisson de paramètre 6. Il s'agit d'une expérience aléatoire admettant deux issues :
   — succès : "avoir des masques chirurigicaux défectueux" de probabilité $p = 0.05$.
   — échec : "ne pas avoir des masques chirurigicaux défectueux" de probabilité $1 - p = 1 - 0.05 = 0.95$.

   Cette expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli. On répète cette expérience 120 fois de manière indépendante. Donc, c'est un schéma de Bernoulli.
   On note A la variable aléatoire associé au nombre des masques chirurgicaux, c'est-à-dire au nombre de succès obtenus à l'issue des 120 épreuves de Bernoulli. Par conséquent A suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 120; p = 0.05)$.
   Pour justifier que la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 120; p = 0.05)$, il suffit de vérifier les conditions d'estimation. On a $n = 120 \geqslant 30$, $p = 0.05 \leqslant 0.1$ et $np = 120 \times 0.05 = 6 < 10$. D'après le théorème du cours, on peut estimer la loi de binomiale de X par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 6$ et on lui associe la variable $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(6)$.
2. Evaluer les probabilités $P(X = k)$ pour k entier naturel inférieur à 6. En utilisant la loi approchée $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(6)$ et la table de Poisson dont $\lambda = 6$, on obtient

$$P(X = 0) \approx P(Y = 0) = \frac{6^0}{0!}e^{-6} \approx 0.0025;$$
$$P(X = 1) \approx P(Y = 1) = \frac{6^1}{1!}e^{-6} \approx 0.0149;$$
$$P(X = 2) \approx P(Y = 2) = \frac{6^2}{2!}e^{-6} \approx 0.0446;$$
$$P(X = 3) \approx P(Y = 3) = \frac{6^3}{3!}e^{-6} \approx 0.0892;$$
$$P(X = 4) \approx P(Y = 4) = \frac{6^4}{4!}e^{-6} \approx 0.1339;$$
$$P(X = 5) \approx P(Y = 5) = \frac{6^5}{5!}e^{-6} \approx 0.1606;$$
$$P(X = 6) \approx P(Y = 6) = \frac{6^6}{6!}e^{-6} \approx 0.1606.$$

lambda=6

P(X=0)=P(Y=0)=0.0025

K=0

$k \backslash \lambda$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0076
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8	0,0000	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9	0,0000	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10	0,0000	0,0000	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11	0,0000	0,0000	0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0019

Corrigé n°4 Soient $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$ et $X \hookrightarrow \mathcal{N}(5;2^2)$. Déterminer, à 10^{-4} près, les probabilités suivantes :

<u>Attention :</u> ici la variable aléatoire Y suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ (de moyenne 0 et de variance 1). Donc, nous utilisons directement la table de la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$, après avoir utilisé la bonne formule de calcul de probabilité, afin de déterminer la valeur de $\Phi(.)$.

1. $P(Y \leqslant 2) = \Phi(2) \approx 0.9772$, $P(Y < -2.02) = 1 - \Phi(2.02) \approx 0.0217$,
   $P(Y > 2.2) = 1 - \Phi(2.2) \approx 0.0139$, $P(Y \geqslant -2.22) = \Phi(2.22) \approx 0.9868$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

P(Y<2)=Φ(2)=Φ(2.00)
=0.9772
et on utilise
2.00=2.0 + 0.00

P(Y>-2.22)=Φ(2.22)
=0.9868
et on utilise
2.22=2.2 + 0.02

2. $P(-1.45 \leqslant Y < 1.45) = 2\Phi(1.45) - 1 \approx 0.8530$,
   $P(0.57 < Y \leqslant 1.82) = \Phi(1.82) - \Phi(0.57) \approx 0.2499$.

Attention : ici, la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(5; 2^2)$, donc nous ne pouvons pas utiliser directement la table de la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. Il faut utiliser la nouvelle variable aléatoire : $Y = \frac{X-5}{2}$ qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$. Ensuite, nous appliquons les formules de calcul des probabilités et la table de la loi $\mathcal{N}(0; 1)$ et nous cherchons la valeur de $\Phi(.)$ dans la table en utilisant le même raisonnement des questions précédentes.

3. $P(X < 3.2) = P\left(\frac{X-5}{2} < \frac{3.2-5}{2}\right) = P(Y < -0.9) = 1 - \Phi(0.9) \approx 0.1841$, $P(X \geqslant 7.88) = P\left(\frac{X-5}{2} \geqslant \frac{7.88-5}{2}\right) = P(Y \geqslant 1.44) = 1 - \Phi(1.44) \approx 0.0749$, $P(X < 7.5) = P\left(\frac{X-5}{2} < \frac{7.5-5}{2}\right) = P(Y < 1.25) = \Phi(1.25) \approx 0.8944$
4. $P(3.96 \leqslant X \leqslant 6.02) = P\left(\frac{3.96-5}{2} \leqslant \frac{X-5}{2} \leqslant \frac{6.02-5}{2}\right) = P(-0.52 \leqslant Y \leqslant 0.51) = P(Y \leqslant 0.51) - P(Y \leqslant -0.52) = \Phi(0.51) - (1 - \Phi(0.52)) \approx 0.3935$, $P(3.44 < X < 6.78) = P\left(\frac{3.44-5}{2} < \frac{X-5}{2} < \frac{6.78-5}{2}\right) = P(-0.78 < Y < 0.89) = P(Y < 0.89) - P(Y < -0.78) = \Phi(0.89) - (1 - \Phi(0.78)) \approx 0.5956$.

Corrigé n°5 Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(20; 5^2)$. Déterminer la valeur du réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

1. $P(X \leqslant \alpha) = 0.99 \Longleftrightarrow P\left(\frac{X-20}{5} \leqslant \frac{\alpha-20}{5}\right) = 0.99 \Longleftrightarrow P\left(Y \leqslant \frac{\alpha-20}{5}\right) = 0.99$ où Y une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$. Donc $\Phi\left(\frac{\alpha-20}{5}\right) = 0.99$.
   Par lecture inverse dans la table de loi normale, on trouve que $\Phi(2.33) \approx 0.9901$. D'où $\frac{\alpha-20}{5} \approx 2.33 \Longrightarrow \alpha \approx 5 \times 2.33 + 20 \approx 31.65$.
2. $P(X \leqslant \alpha) = 0.01 \Longleftrightarrow P\left(\frac{X-20}{5} \leqslant \frac{\alpha-20}{5}\right) = 0.01 \Longleftrightarrow P\left(Y \leqslant \frac{\alpha-20}{5}\right) = 0.01$ où Y une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$. Donc $\Phi\left(\frac{\alpha-20}{5}\right) = 0.01$.
   Par lecture inverse dans la table de loi normale, on trouve que $\Phi(-2.33) \approx 1 - 0.9901 \approx 0.01$. D'où $\frac{\alpha-20}{5} \approx -2.33 \Longrightarrow \alpha \approx -5 \times 2.33 + 20 \approx 8.35$.

Corrigé n°6 En utilisant la modélisation statistique multilinéaire, un économiste français prédit que le prix du gasoil en mars 2022 suivra une loi normale $\mathcal{N}(1.6; 2.44^2)$.

1. Calculer la probabilité pour que le prix du gasoil soit moins de 1.42€.
   Soit X la variable aléatoire donnant le prix du gasoil. On cherche $P(X \leqslant 1.42)$:
   $$P(X \leqslant 1.42) = P\left(\frac{X-1.6}{2.44} \leqslant \frac{1.42-1.6}{2.44}\right) = P(Z \leqslant -0.071)$$
   où $Z = \frac{X-1.6}{2.44}$ est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.. Or, d'après la table de la loi normale
   $$P(Z \leqslant -0.071) = P(Z \geqslant 0.071) \approx P(Z \geqslant 0.07) = 1 - P(Z \leqslant 0.07) \approx 1 - 0.5279 \approx 0.4721.$$
2. Calculer la limite α telle que la probabilité d'avoir un prix plus petit est de 40%.
   On veut calculer $P(X \leqslant \alpha) = 40\% = 0.4$. On a
   $$P(X \leqslant \alpha) = P\left(\frac{X-1.6}{2.44} \leqslant \frac{\alpha-1.6}{2.44}\right) = P\left(Z \leqslant \frac{\alpha-1.6}{2.44}\right) = 0.2$$

où $Z = \dfrac{X-1.6}{2.44}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$. On souhaite déterminer α tel que $P\left(Z \leqslant \dfrac{\alpha-1.6}{2.44}\right) = 0.4$. Puisque la probabilité est plus petite que 0.5 $(0.2 \leqslant 0.5)$ alors $\dfrac{\alpha-1.6}{2.44}$ sera une valeur négative, et ainsi on cherche

$$P\left(Z \leqslant -\frac{\alpha-1.6}{2.44}\right) = 1-0.4 = 0.6$$

D'après la table de la loi normale, on a $0.26 \approx -\frac{\alpha-1.6}{2.44}$. Ce qui veut dire que $\alpha <\approx 1.6 - 2.44 \times 0.26 \approx 0.96$. On peut prendre $\alpha \approx 1$€.

Corrigé n°7 Un glacier vend de la glace en pot. On admet que la capacité des pots suit une loi normale de moyenne $500ml$ et d'écart-type 20. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ et soit X la variable aléatoire associée à la capacité des pots. Donc, X suit la loi normale $\mathcal{N}(500;20^2)$.

1. Déterminer la probabilité qu'un pot de glace ait une capacité comprise entre $480ml$ et $520ml$.

$$\begin{aligned} P(480 \leqslant X \leqslant 520) &= P\left(\frac{480-500}{20} \leqslant \frac{X-500}{20} \leqslant \frac{520-500}{20}\right) = P(-1 \leqslant Y \leqslant 1) \\ &= 2\Phi(1) - 1 \approx 0.6826 = 68.26\%. \end{aligned}$$

2. Si la capacité d'un pot est inférieure à $450ml$, le glacier est contraint de le retirer de la vente. Selon ce critère, quel est le pourcentage de perte ?

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 450) &= P\left(\frac{X-500}{20} \leqslant \frac{450-500}{20}\right) = P(Y \leqslant -2.5) \\ &= 1 - \Phi(2.5) \approx 0.0062 = 0.62\%. \end{aligned}$$

3. Si la capacité d'un pot est supérieure à $560ml$, le glacier vend à perte. Selon ce critère, quel est le pourcentage de vente à perte ?

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 560) &= P\left(\frac{X-500}{20} \geqslant \frac{560-500}{20}\right) = P(Y \geqslant 3) \\ &= 1 - \Phi(3) \approx 0.0013 = 0.13\%. \end{aligned}$$

Corrigé n°8 Dans un jeu de 52 cartes, on effectue 390 tirages d'une carte successivement et avec remise. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de rois tirés à l'issue des 390 tirages.

1. Préciser la loi de la variable aléatoire X en donnant ses paramètres.
   Il s'agit d'une expérience aléatoire admettant deux issues :
   — succès : "tirer un roi" de probabilité $p = \frac{4}{52}$.
   — échec : "ne pas vendre un appartement suite à une visite" de probabilité $1-p = 1-\frac{4}{52} = \frac{48}{52}$.

Cette expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli. On répète cette expérience 390 fois de manière indépendante. Donc, c'est un schéma de Bernoulli.
On note X la variable aléatoire associé au nombre de rois tirés c'est-à-dire au nombre de succès obtenus à l'issue des 390 épreuves de Bernoulli. Par conséquent A suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n = 390; p = \frac{4}{52}\right)$.

2. Calculer la probabilité d'avoir tiré au plus 10 rois.

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 10) &= P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = 10) \\ &= C_{390}^{0} \frac{4}{52}\left(1 - \frac{4}{52}\right)^{390} + \ldots + C_{390}^{10}\left(\frac{4}{52}\right)^{10}\left(1 - \frac{4}{52}\right)^{380} \approx \end{aligned}$$

3. Justifier que l'on peut approcher la loi de X par une loi normale dont les paramètres $\mu = 30$ et $\sigma \approx 5.263$.
Comme $n = 390 \geqslant 20$, $np = 390 \times \frac{4}{52} \approx 29.991 \geqslant 10$ et $n(1-p) = 390 \times \left(1 - \frac{4}{52}\right) = 359.97 \geqslant 10$, on peut donc approcher la loi de X par la loi normale $\mathcal{N}(29.99; \sqrt{27.69}^2)$ où $E(X) = 390 \times \frac{4}{52} \approx 29.99$ et $\sigma_X = \sqrt{390 \times \frac{4}{52} \times \left(1 - \frac{4}{52}\right)} \approx \sqrt{27.69}$.

4. En utilisant la question 3., calculer la probabilité d'avoir tiré au plus 10 rois.
Soient Y la variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$ et Z la variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(29.99; \sqrt{27.69}^2)$. On a

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 10) \approx P(Z \leqslant 10.5) &= P\left(\frac{Z - 29.99}{\sqrt{27.69}} \leqslant \frac{10.5 - 29.99}{\sqrt{27.69}}\right) \\ &= P\left(Y \leqslant \frac{-19.49}{\sqrt{27.69}}\right) = P\left(Y \leqslant \frac{20.49}{\sqrt{27.69}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{20.49}{\sqrt{27.69}}\right) \approx \Phi(3.9) \approx 0.99995. \end{aligned}$$

5. En utilisant la question 3., calculer la probabilité d'avoir tiré exactement 10 rois.
Soient Y la variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$ et Z la variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(29.99; \sqrt{27.69}^2)$. On a

$$\begin{aligned} P(X = 10) \approx= P(9.5 \leqslant Z \leqslant 10.5) &= P\left(\frac{9.5 - 29.99}{\sqrt{27.69}} \leqslant \frac{Z - 29.99}{\sqrt{27.69}} \leqslant \frac{10.5 - 29.99}{\sqrt{27.69}}\right) \\ &= P\left(\frac{-20.49}{\sqrt{27.69}} \leqslant Y \leqslant \frac{-19.49}{\sqrt{27.69}}\right) = P\left(\frac{19.49}{\sqrt{27.69}} \leqslant Y \leqslant \frac{20.49}{\sqrt{27.69}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{20.49}{\sqrt{27.69}}\right) - \Phi\left(\frac{19.49}{\sqrt{27.69}}\right) \\ &\approx \Phi(3.9) - \Phi(3.7) \approx 0.99995 - 0.99989 \approx 0.00006 = 6 \times 10^{-5}. \end{aligned}$$

Corrigé n°9 Un agent immobilier a estimé que la probabilité de vendre un appartement suite à une visite était 15%. Il effectue en général 120 visites par mois.

On considère que les visites d'appartements sont des expériences aléatoires indépendantes les unes des autres. On appelle A la variable aléatoire égale au nombre d'appartement vendus en un mois après une visite.

1. Justifier que la variable aléatoire A suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres n et p.
   Il s'agit d'une expérience aléatoire admettant deux issues :
   — succès : "vendre un appartement suite à une visite" de probabilité $p = 0.15$.
   — échec : "ne pas vendre un appartement suite à une visite" de probabilité $1-p = 1-0.15 = 0.85$.
   Cette expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli. On répète cette expérience 120 fois de manière indépendante. Donc, c'est un schéma de Bernoulli.
   On note A la variable aléatoire associé au nombre d'appartement vendus après une visite en un mois, c'est-à-dire au nombre de succès obtenus à l'issue des 120 épreuves de Bernoulli. Par conséquent A suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 120; p = 0.15)$.
2. On souhaite calculer la probabilité que l'agent vende exactement 30 appartements en un mois après une visite.
   a) Calculer C_{120}^{30} à l'aide de la calculatrice. Que peut-on conclure .
   À l'aide de la calculatrice, one gets :
   $$C_{120}^{30} = 1.69745387607974 \times 10^{14}.$$
   Ce nombre est difficile à obtenir car il fait intervenir des factorielles importantes et la calculatrice nous donne qu'une valeur approchée (en réalité $C_{120}^{30} = 169745387607974089094600 74096$). De même, pour les valeurs 0.15^{30} et $(1-0.07)^{90}$ qui interviennent dans le calcul de $P(A = 30)$. Pour cela, nous proposons d'approcher la loi de A par une loi convenable.
   b) Justifier que l'on peut approcher la loi de A par une loi normale que l'on précisera.
   Comme $n = 120 \geqslant 20$, $np = 120 \times 0.15 \geqslant 10$ et $n(1-p) = 120 \times 0.85 = 85 \geqslant 10$, on peut donc approcher la loi de A par la loi normale $\mathcal{N}(18; \sqrt{15.30}^2)$ où $E(A') = 120 \times 0.15 = 18$ et $\sigma_{A'} = \sqrt{120 \times 0.15 \times (1-0.15)} = \sqrt{15.30}$. On note $A' \hookrightarrow \mathcal{N}(18; \sqrt{15.30}^2)$.
   c) À l'aide de cette approximation, calculer la probabilité de vendre exactement 30 appartements en un mois après une visite.
   Soit Y la variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$ et soit A' la variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(18; \sqrt{15.30}^2)$. On a
   $$\begin{aligned} P(A = 30) = P(29.5 \leqslant A' \leqslant 30.5) &= P\left(\frac{29.5-18}{\sqrt{15.30}} \leqslant \frac{A'-18}{\sqrt{15.30}} \leqslant \frac{30.5-18}{\sqrt{15.30}}\right) \\ &= P\left(\frac{11.50}{\sqrt{15.30}} \leqslant Y \leqslant \frac{12.50}{\sqrt{15.30}}\right) = \Phi\left(\frac{12.50}{\sqrt{15.30}}\right) - \Phi\left(\frac{11.50}{\sqrt{15.30}}\right) \\ &\approx \Phi(3.20) - \Phi(2.94) \approx 0.99931 - 0.99836 \approx 0.00095 = 9.5 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$