Corrigé n°1

Rappel : soit A un sous-ensemble de E (A peut être E lui-même). On appelle cardinal de A et on note $card(A)$ le nombre d'éléments de A.

On considère un jeu de 32 cartes. Soient A let B deux sous-ensembles de E représentant respectivement les couleurs rouges et les figures. Calculer le cardinal de : A, B et $A \cup B$.
On a $card(E) = 32$, $card(A) = 16$, $card(B) = 12$.

Corrigé n°2

1. Combien peut-on former de nombres à 4 chiffres ne terminant pas par le chiffre 4 ?
   — Nombre de possibilités pour le 1er chiffre : 9 (tous les chiffres sauf 0).
   — Nombre de possibilités pour le 2ème et le 3ème chiffres : $10 \times 10 = 100$ (tous les chiffres)
   — Nombre de possibilités pour le 4ème chiffre : 9 (tous les chiffres sauf 4)
   On peut donc former $9 \times 10 \times 10 \times 9 = 8100$ nombres à 4 chiffres ne terminant pas par le chiffre 4.
2. Combien peut-on former de nombres à 4 chiffres ne terminant pas par le chiffre 4 et composés de chiffres deux à deux distincts ?
   — Nombre à 4 chiffres deux à deux distincts (9 possibilités pour le 1er chiffre, 9 possibilités pour le 2ème chiffre, 8 possibilités pour le 3ème chiffre, 7 possibilités pour le 4ème chiffre) : $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$.
   — Nombre à 4 chiffres terminant par le chiffre 4 et composés de chiffres deux à deux distincts (8 possibilités pour le 1er chiffre, 8 possibilités pour le 2ème chiffre, 7 possibilités pour le 3ème chiffre, 1 possibilité pour le 4ème chiffre) : $8 \times 8 \times 7 \times 1 = 448$.
   On peut donc former $4536 - 448 = 4088$ nombres à 4 chiffres ne terminant pas par le chiffre 4 et composé de chiffres deux à deux distincts.

Corrigé n°3 On lance un dé à 12 faces comportant 5 faces avec un numéro pair, 8 faces avec un numéro multiple de 3 et 3 faces avec un numéro multiple de 6.

1. Combien y a-t-il de faces portant un numéro pair ou multiple de 3 ?
   Notons A l'ensemble des faces avec un numéro pair et B l'ensemble des faces avec un numéro multiple de 3.
   Alors, $A \cap B$ est l'ensemble des faces avec un numéro pair et multiple de 3, c'est-à-dire l'ensemble des faces avec un numéro multiple de 6.
   Donc $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B) = 5 + 8 - 3 = 10$. Il y a donc 10 faces portant un numéro pair ou multiple de 3.
2. Déduire le nombre de faces portant un numéro ni pair, ni multiple de 3.
   On a $card(\overline{A \cup B}) = 12 - card(A \cup B) = 12 - 10 = 2$. Il y a 2 faces portant un numéro ni pair, ni multiple de 3.

Corrigé n°4 McDonald's propose sur sa carte 5 entrées, 3 plats et 4 desserts. Lina décide d'aller déjeuner tous les jours à McDonald's, mais a dit qu'elle n'irait plus dès qu'elle serait contraint de composer un menu qu'elle a déjà consommé.

1. Au bout de combien de jours Lina devra t-elle changer McDonald's ?
   On note E_1 l'ensemble des entrées, E_2 l'ensemble des plats et E_3 l'ensemble des desserts. Un menu est un triplet de l'ensemble $E_1 \times E_2 \times E_3$. Or $card(E_1 \times E_2 \times E_3) = card(E_1) \times card(E_2) \times card(E_3) = 5 \times 3 \times 4 = 60$.
   On peut donc composer 60 menus différents dans McDonald's. Ainsi, Lina devra changer McDonald's au bout de 60 jours.

Corrigé n°5 Dans son porte-monnaie, Lina a huit pièces différentes : $1, 2, 5, 10, 20, 50$ cents et 1€ et 2€. Elle en sort 5 sucessivement avec remise et note à chaque tirage la pièce sortie.
Combien de tirages différents peut-elle faire ?
On note E l'ensemble des pièces du porte-monnaie de Lina. Un tirage est un quintuplet d'éléments de E. Comme $card(E^5) = 8^5 = 32768$, il peut faire 32768 listes de pièces différentes.

Corrigé n°6 On dispose d'un jeu de 52 cartes. On tire 5 cartes simultanément. Combien y a-t-il de mains :
Il s'agit de tirages simultanés : on utilise donc des combinaisons.

1. au total ? $C_{52}^5 = \binom{52}{5} = 2598960$ mains.
2. comportant uniquement des cartes rouges ? $C_{26}^5 = \binom{26}{5} = 65780$ mains.
3. comportant uniquement des ♦ ? $C_{13}^5 = \binom{13}{5} = 1287$ mains.
4. comportant uniquement des figures ? $C_{12}^5 = \binom{12}{5} = 792$ mains.
5. comportant les 4 as ? $C_4^4 \times C_{48}^1 = \binom{4}{4} \times \binom{48}{1} = 48$ mains
6. comportant exactement 3 rois ? $C_4^3 \times C_{48}^2 = \binom{4}{3} \times \binom{48}{2} = 4512$ mains.
7. comportant exactement 3 dames et 2 valets ? $C_4^3 \times C_4^2 = \binom{4}{3} \times \binom{4}{2} = 24$ mains.
8. comportant exactement 3 as et 2 cartes de valeurs différentes ? Soit $C_4^3 \times C_{12}^1 \times C_4^1 = \binom{4}{3} \times \binom{12}{1} \times \binom{4}{1} = 48$ mains car parmi les douzes valeurs restantes en exceptant les as, il faut en choisir deux et tirer une carte de chacune de ces deux valeurs.

Corrigé n°7 Une urne contient 10 boules ①, ②, ③, ④,⑤, ⑥, ⑦, ⑧, ⑨ et ⑩. Combien y'a-t-il de tirages au total :

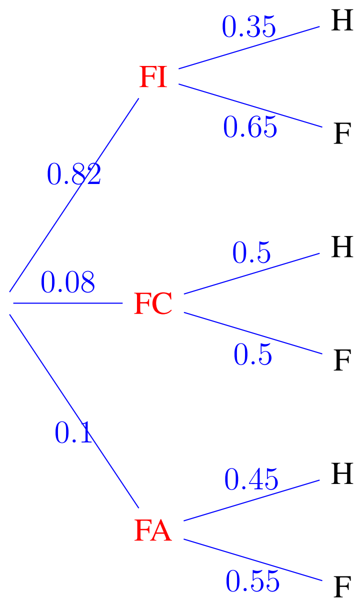
1. si on tire trois boules successivement sans remise ?
   il s'agit d'arrangements, soit $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$ tirages.
2. si on tire quatre boules successivement avec remise ?
   il s'agit de triplets, soit $10^4 = 10000$ tirages.
3. si on tire cinq boules simultanément ?
   il s'agit de combinaisons, soit $C_{10}^5 = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = 252$ tirages.

Corrigé n°8

1. Soient A et B deux événements d'un même univers Ω tels que : $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.4$ et $P(A \cap B) = 0.3$.
   (a) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$.
   (b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.4 - 0.3 = 0.6$.
   (c) $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$.
   (d) $P_B(A) = \frac{P(A \cap B}{P(B)} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$.
2. Soient A et B deux événements d'un même univers Ω tels que : $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.6$ et $P_A(B) = 0.2$.
   (a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.4 = 0.6$.
   (b) $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - 0.2 = 0.8$.
   (c) $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = 0.2 \times 0/4 = 0.08$.
   (d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.6 - 0.08 = 0.92$.
3. Soient A et B deux événements d'un même univers Ω tels que : $P(A) = 0.5$, $P_A(B) = 0.6$ et $P_B(B) = 0.8$.
   (a) $P(A \cap B) = P_a(B) \times P(A) = 0.6 \times 0.5 = 0.3$
   (b) $P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P_B(A)} = \frac{0.3}{0.8} = 0.375$.
   (c) $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \Longrightarrow P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.375 - 0.3 = 0.075$.
   (d) $P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0.075}{1 - 0.5} = 0.15$.

Corrigé n°9 Dans un département "techniques de commercialisation", trois formations sont proposées : formation initiale (FI), formation continue (FC) et formation par alternance (FA). On sait que :
- 8% des étudiants sont inscrits en FC ;
- 10% des étudiants sont inscrits en FA ;
- les femmes représentent :
  - 65% des inscrits en FI ;
  - 50% des inscrits en FC ;
  - 55% des inscrits en FA.

1. Représenter ce situation à l'aide d'un arbre de probabilité que l'on complétera dans la suite de l'exercice.



$P(H \cap FI) = P_{FI}(H) \times P(FI) = 0.35 \times 0.82 = 0.287$

$P(FI \cap F) = P_{FI}(F) \times P(FI) = 0.65 \times 0.82 = 0.533$

$P(FC \cap H) = P_{FC}(H) \times P(FC) = 0.5 \times 0.08 = 0.04$

$P(FC \cap F) = P_{FC}(F) \times P(FC) = 0.5 \times 0.08 = 0.04$

$P(FA \cap H) = P_{FA}(H) \times P(FA) = 0.45 \times 0.1 = 0.045$

$P(FA \cap F) = P_{FA}(F) \times P(FA) = 0.55 \times 0.1 = 0.055$

2. On choisit un étudiant au hasard.
   — Déterminer la probabilité que cet étudiant soit une femme en FA.
   $P(F \cap FA) = P_{FA}(F) \times P(FA) = 0.55 \times 0.1 = 0.055.$
   — Déterminer la probabilité que cet étudiant soit un homme.
   $P(H) = P(H \cap FI) + P(H \cap FC) + P(H \cap FA) = (1 - 0.65) \times (1 - 0.08 - 0.1) + (1 - 0.5) \times 0.08 + (1 - 0.55) \times 0.1 = 0.372.$
   — Déterminer la probabilité que cet étudiant soit un homme ou en FC.
   $P(H \cup FC) = P(H) + P(FC) - P(H \cap FC) = 0.372 + 0.08 - 0.08 \times 0.5 = 0.412.$
   — Déterminer la probabilité que cet étudiant soit en FI sachant que c'est un homme.
   $P_H(FI) = \frac{P(H \cap FI}{P(H)} = \frac{0.82 \times 0.35}{0.372} \approx 0.7715.$

Corrigé n°10 On tire simultanément au hasard 3 jetons dans un jeu de 10 jetons. Les jetons sont numérotés comme suit :$1; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 2; 3$. Le prix de la participation à ce jeu est 5 euros.
On appelle X la variable aléatoire égale au gain qui correspond à la somme obtenue en additionnant les nombres portés sur chaque jeton.

1. Déterminer l'univers Ω (ensemble des cas possibles pour l'expérience aléatoire) :

Univers Ω	$(1;1;1)$	$\cdots$	$\cdots$	$(1;1;2)$	$\cdots$	$(1;2;2)$	$\cdots$	$(2;2;2)$	$(2;2;3)$
Valeurs x_i	3	$\cdots$	$\cdots$	4	$\cdots$	5	$\cdots$	6	7

On en déduit le nombre des cas possibles : $C_{10}^3 = \binom{10}{3} = 120$ et le valeurs de Ω : $X(\Omega) = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

2. Déterminer la loi de probabilité de X. Ici, on calcule les probailités associées à chaque valeur x_i. Par définition, on a

$$P(\texttt{Evénement}) = \frac{\texttt{Nombre de cas favorables}}{\texttt{Nombre de cas possibles}} = \frac{card(\texttt{Evénement})}{card(\Omega)}.$$

On a donc

$$P(X=3) = \frac{C_5^3 \times C_4^0 \times C_1^0}{C_{10}^3} = \frac{10}{120}$$
$$P(X=4) = \frac{C_5^2 \times C_4^1 \times C_1^0}{C_{10}^3} = \frac{40}{120}$$
$$P(X=5) = \frac{C_5^1 \times C_4^2 \times C_1^0 + C_5^2 \times C_4^0 \times C_1^1}{C_{10}^3} =$$
$$P(X=6) = \frac{C_5^1 \times C_4^1 \times C_1^1 + C_5^0 \times C_3^0 \times C_0^1}{C_{10}^3} = \frac{24}{120}$$
$$P(X=7) = \frac{C_5^0 \times C_4^2 \times C_1^1}{C_{10}^3} = \frac{6}{120}$$

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est

Valeurs x_i	3	4	5	6	7
$P(X=x_i)$	$\frac{10}{120}$	$\frac{40}{120}$	$\frac{40}{120}$	$\frac{24}{120}$	$\frac{6}{120}$

On vérifie facilement que la somme des probabilités vaut 1.

3. Calculer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il intéressant pour l'organisateur ?
Par définition, on a

$$E(X) = x_1 \times P(X=x_1) + x_2 \times P(X=x_2) + x_3 \times P(X=x_3) + x_4 \times P(X=x_4) + x_5 \times P(X=x_5)$$
$$= 3 \times \frac{10}{120} + 4 \times \frac{40}{120} + 5 \times \frac{40}{120} + 6 \times \frac{24}{120} + 7 \times \frac{6}{120} = 4.8$$

Le jeu n'est pas intéressant car le gain moyen $E(X) = 4.8$€ est inférieur au prix de participation (5€.)

4. Calculer la variance $V(X)$. En déduire σ_X. Ici on souhaite mésurer l'écart par rapport à la moyenne : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} V(X) &= x_1^2 \times P(X=x_1) + x_2^2 \times P(X=x_2) + x_3^2 \times P(X=x_3) + x_4^2 \times P(X=x_4) \\ &\quad + x_5^2 \times P(X=x_5) - [E(X)]^2 \\ &= 3^2 \times \frac{10}{120} + 4^2 \times \frac{40}{120} + 5^2 \times \frac{40}{120} + 6^2 \times \frac{24}{120} + 7^2 \times \frac{6}{120} - 4.8^2 \\ &= 1.02 \end{aligned}$$

Par conséquent, $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1.02} \approx 1$€.

Remarque

— plus l'écart-type est proche de 0, plus le risque de perte est faible.

— plus l'écart-type est proche de l'espérance, plus le risque de perte est grand.

5. Déterminer en-deçà de quel prix le jeu devient intéressant pour l'organisateur ?

Corrigé n°11 Un investisseur achète une action AIRBUS dont le cours boursier C_0 vaut 100€. Au bout d'un an, le cours de l'action est égal à C. L'investisseur s'attend à toucher un dividende D en cours d'année. La richesse de l'investisseur dans un an sera égale à la somme du dividende touché et de la valeur boursière de l'action.

Le cours C et le dividende D sont deux variables aléatoires dont la loi jointe est donnée par le tableau ci-dessous :

D / C	0	20	40	$P(C = C_i)$
80	0.10	0,05	0,05	0.20
100	0.05	0.15	0.05	0.25
110	0	0.15	0.15	0.30
120	0	0.05	0.20	0.25
$P(D = D_i)$	0.15	0.40	0.45	$\sum_i^4 P(C = C_i) = \sum_i^4 P(D = D_i) = 1$

1. Calculer l'espérance mathématique du cours C de l'action AIRBUS dans un an.

$$E(C) = \sum_i^4 P(C = C_i) \times C_i$$
$$E(C) = 0.20 \times 80 + 0.25 \times 100 + 0.30 \times 110 + 0.25 \times 120 = 104$$

En investissant dans l'action AIRBUS achetée à 100€ on peut espérer la revendre à 104€.
La variance du cours C de l'action AIRBUS est donnée par

$$V(C) = \sum_i^4 P(C = C_i) \times C_i^2 - [E(C)]^2$$
$$V(C) = 0.20 \times 80^2 + 0.25 \times 100^2 + 0.30 \times 110^2 + 0.25 \times 120^2 - 104^2 = 194$$

$\sigma_C = \sqrt{V(C)} \approx 13.93$

2. Calculer l'espérance mathématique du divende D distribué en cours d'année.

$$E(D) = \sum_i^3 P(D = D_i) \times D_i$$
$$E(D) = 0.15 \times 0 + 0.40 \times 20 + 0.45 \times 40 = 26$$

Dans un ans, l'investisseur recevra un dividende de 26€. La variance du dividende D est donnée par

$$V(D) = \sum_i^3 P(D = D_i) \times D_i - 2 - [E(D)]^2$$
$$V(D) = 0.15 \times 0^2 + 0.40 \times 20^2 + 0.45 \times 40^2 - 26^2 = 204$$

$\sigma_D = \sqrt{V(D)} = \sqrt{204} \approx 14.28$

Conséquence : on peut dire que le risque sur les actions n'est pas trop élevé car l'espérance est 104 et l ?écart type 13.93. Par contre, il y a un grand risque sur les dividendes.

3. Déterminer la loi de probabilité de la variable V où V désigne la variation de la richesse définie par $V = C + D - C_0$.
Les valeurs prises par V sont : $-20, 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60$. On a donc

$P(V = -20) = P(C = 80; D = 0) = 0.10;$ $\quad P(V = 10) = P(C = 110; D = 0) = 0;$

$P(V = 0) = P(C = 80; D = 20) + P(C = 100; D = 0) = 0.05 + 0.05 = 0.10;$

$P(V = 20) = P(C = 80; D = 40) + P(C = 100; D = 20) + P(C = 120; D = 0) = 0.20$

$P(V = 30) = P(C = 110; D = 20) = 0.15;$ $\quad P(V = 50) = P(C = 110; D = 40) = 0.15;$

$P(V = 40) = P(C = 100; D = 40) + P(C = 120; D = 20) = 0.05 + 0.05 = 0.10;$

$P(V = 60) = P(C = 120; D = 40) = 0.20.$

La loi de probabilité de la variable aléatoire V est : (on vérifie facilement que la somme des probabilités vaut 1)

Valeurs v_i	-20	0	10	20	30	40	50	60
$P(V=v_i)$	0.10	0.10	0	0.20	0.15	0.10	0.15	0.20

On calcule

— L'espérance méthématique de V de deux manières différentes :
  - Formule de définition) $E(V) = -20 \times 0.10 + 0 \times 0.10 + 10 \times 0 + 20 \times 0.20 + 30 \times 0.15 + 40 \times 0.10 + 50 \times 0.15 + 60 \times 0.20 = 30€$.
  - Transformation linéaire $E(V) = E(C+D-C_0) = E(C+D-100) = E(C)+E(D)-100 = 104 + 26 - 100 = 30€$.

— La variance de la variance de richesse peut se calculer de deux manières différentes :
  - Formule de définition) $V(V) = (-20)^2 \times 0.10 + 0^2 \times 0.10 + 10^2 \times 0 + 20^2 \times 0.20 + 30^2 \times 0.15 + 40^2 \times 0.10 + 50^2 \times 0.15 + 60^2 \times 0.20 - 30^2 = 610$ et $\sigma_V = \sqrt{610} \approx 24.698$.
  - Transformation linéaire $V(V) = V(C+D-C_0) = V(C) + V(D) + 2\text{cov}(C,D)$ où cov désigne la covariance entre C et D dont la formule est :

$$\text{cov}(C,D) = E(C;D) - E(C) \times E(D) = \sum_{i,j} P(C_i;D_j) \times C_i \times D_j - E(C) \times E(D).$$

Or $E(C;D) \sum_{i,j} P(C_i;D_j) \times C_i \times D_j = (0.10 \times 80 \times 0) + (0.05 \times 80 \times 20) + (0.05 \times 80 \times 40) + (0.05 \times 100 \times 0) + (0.15 \times 100 \times 20) + (0.05 \times 100 \times 40) + (0 \times 110 \times 0) + (0.15 \times 110 \times 20) + (0.15 \times 110 \times 40) + (0 \times 120 \times 0) + (0.05 \times 120 \times 20) + (0.20 \times 120 \times 40) = 2810$.
Donc

$$\text{cov}(C,D) = 2810 - 104 \times 26 = 106.$$

Remarque

$\text{cov}(C,D) < 0$	$\text{cov} = 0$	$\text{cov} > 0$
Dépendance négative entre C et D Variation en sens inverse	Indépendance entre C et D	Dépendance positive entre C et D variation en même sens

Par conséquent : $V(V) = 194 + 204 + 2 \times 106 = 610$ et $\sigma_V = \sqrt{610} \approx 24.698$.

— Calculer la probabilité d'avoir une variation de richesse supérieur ou égale à 0.
$P(V \geqslant 0) = P(C + D \geqslant C_0) = 0.10 + 0 + 0.20 + 0.15 + 0.10 + 0.15 + 0.20 = 0.9$
On peut utiliser la complémentarité pour calculer $P(V \geqslant 0)$. En effet

$$P(V \geqslant 0) = 1 - P(V < 0) = 1 - P(V = -20) = 1 - 0.10 = 0.90.$$

Corrigé n°12 Dans un jeu de 32 cartes, on effectue un tirage sans remise. Le prix de la participation à ce jeu est 5€. À l'issue des quatre tirages :

1. si on a tiré exactement 1 roi, on gagne 5€.
2. si on a tiré exactement 2 rois, on gagne 10€.
3. si on a tiré exactement 3 rois, on gagne 25€.

4. si on a tiré 4 rois, on gagne 50€.

On désigne par X la variable aléatoire associée au nombre de rois tirés à l'issue des quatre tirages.

1. Donner la loi de probabilité X.
D'après les données, on constate que X peut prendre les valeurs suivantes : -5 (perte du prix de la participation), $5-5=0$ (tirage d'un roi), $10-5=5$ (tirage de 2 rois), $25-5=20$ (tirage de 3 rois), $50-5=45$ (tirage de 4 rois). Il s'agit d'un tirage sans remise, donc on utilise les arrangements pour calculer les probabilités :

$$P(X=-5)=\frac{A_{28}^4}{A_{32}^4}=\frac{4095}{7192}; \qquad P(X=0)=C_4^1\times\frac{A_4^1\times A_{28}^3}{A_{32}^4}=\frac{1638}{4495}$$
$$P(X=5)=C_4^2\times\frac{A_4^2\times A_{28}^2}{A_{32}^4}=\frac{567}{8990}; \qquad P(X=20)=C_4^3\times\frac{A_4^3\times A_{28}^1}{A_{32}^4}=\frac{14}{4495}$$
$$P(X=45)=C_4^4\times\frac{A_4^4}{A_{32}^4}=\frac{1}{35960}$$

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est

Valeurs x_i	-5	0	5	20	45
$P(X=x_i)$	$\frac{4095}{7192}$	$\frac{1638}{4495}$	$\frac{567}{8990}$	$\frac{14}{4495}$	$\frac{1}{35960}$

On vérifie facilement que la somme des probabilités vaut 1.

2. Calculer $E(X)$ et donner le résultat à 10^{-2} près. Le jeu est-il rentable pour l'organisateur ?
$E(X)=-5\times\frac{4095}{7192}+0\times\frac{1638}{4495}+5\times\frac{567}{8990}+20\times\frac{14}{4495}+45\times\frac{1}{35960}\approx-2.47$€.
Le jeu est rentable pour l'organisateur puisque le joueur perd en moyenne environ -2.47€.

3. Calculer la variance de X et déduire son écart-type.
$V(X)=(-5)^2\times\frac{4095}{7192}+0^2\times\frac{1638}{4495}+5^2\times\frac{567}{8990}+20^2\times\frac{14}{4495}+45^2\times\frac{1}{35960}-(-2.47)^2\approx 11.012$.
$\sigma_X=\sqrt{V(X)}=\sqrt{11.012}\approx 3.318$.

4. En utilisant les questions précédentes, déterminer le prix pour lequel le jeu devient rentable pour le joueur.
On note x le prix de la participation au jeu et on procède de la même manique que la question 1, les valeurs prises par X sont : $-x$, $5-x$, $10-x$, $25-x$, $50-x$. La loi de probabilité de X s'écrit ainsi :

Valeurs x_i	$-x$	$5-x$	$10-x$	$25-x$	$50-x$
$P(X=x_i)$	$\frac{4095}{7192}$	$\frac{1638}{4495}$	$\frac{567}{8990}$	$\frac{14}{4495}$	$\frac{1}{35960}$

$E(X)=-x\times\frac{4095}{7192}+(5-x)\times\frac{1638}{4495}+(10-x)\times\frac{567}{8990}+(25-x)\times\frac{14}{4495}+(50-x)\times\frac{1}{35960}$.
Le jeu devient rentable pour le joueur dès lors que le gain moyen est positif, c'est-à-dire que $E(X)\geqslant 0$. Par un simple calcul, on obtient

$$\frac{9105}{1798}-x\geqslant 0\Longrightarrow x\leqslant\frac{9105}{1798}\approx 5.06.$$

Par conséquent, le jeu devient rentable pour le joueur pour un prix inférieur à 5.06€.

Corrigé n°13 On considère la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20; 0.36)$.. Calculer $P(X=3)$, $P(X \leqslant 4)$ et $P(X \geqslant 6)$.

— $P(X=3) = C_{20}^{3} \times 0.36^3 \times (1-0.36)^{20-3} = 1140 \times 0.36^3 \times 0.64^{17} \approx 0.02697$.

— $P(X \leqslant 4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 4) &= 1 \times (1-0.36)^{20} + C_{20}^{1} \times 0.36^1 \times (1-0.36)^{20-1} + C_{20}^{2} \times 0.36^2 \times (1-0.36)^{20-2} \\ &\quad + C_{20}^{3} \times 0.36^3 \times (1-0.36)^{20-3} + C_{20}^{4} \times 0.36^4 \times (1-0.36)^{20-4} \\ &= 1 \times 0.64^{20} + 20 \times 0.36^1 \times 0.64^{19} + 190 \times 0.36^2 \times 0.64^{18} \\ &\quad + 1140 \times 0.36^3 \times 0.64^{17} + 4845 \times 0.36^4 \times 0.64^{16} \approx 0.1011. \end{aligned}$$

— $P(X \geqslant 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - P(X \leqslant 5) = 1 - [P(X \leqslant 4) + P(X=5)] = 1 - [C_{20}^{5} \times 0.36^5 \times (1-0.36)^{20-5}] = 1 - [0.1011 + 15504 \times 0.36^5 \times 0.64^{15}] \approx 0.7828$.

— $P(3 \leqslant X \leqslant 5) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = 1140 \times 0.36^3 \times 0.64^{17} + 4845 \times 0.36^4 \times 0.64^{16} + 15504 \times 0.36^5 \times 0.64^{15} \approx 0.2438$.

Corrigé n°14 Dans un jeu de 32 cartes, on effectue un tirage avec remise. Le prix de participation à ce jeu est 5€. À l'issue des quatre tirages :

1. si on a tiré exactement 1 roi, on gagne 5€.
2. si on a tiré exactement 2 rois, on gagne 10€.
3. si on a tiré exactement 3 rois, on gagne 25€.
4. si on a tiré 4 rois, on gagne 50€.

On désigne par X la variable aléatoire associée au nombre de rois tirés à l'issue des quatre tirages.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p à préciser.
   Il s'agit d'une expérience aléatoire admettant deux issues :
   — succès : "trier un roi" de probabilité égale à $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.
   — échec : "ne pas tirer un roi" de probabilité égale à $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.
   Cette expérience est donc une épreuve de Bernoulli. On répète cette expérience aléatoire 4 fois de manière indépendante (tirage avec remise) : c'est un schéma de Bernoulli.
   La variable aléatoire X est associée au nombre de rois tirés à l'issue des 4 tirages, c'est-à-dire au nombre de succès obtenus à l'issue des 4 épreuves de Bernoulli. Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n=4; p=\frac{1}{8}\right)$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n=4; p=\frac{1}{8}\right)$.
2. Calculer la probabilité d'avoir tiré exactement deux rois.
   $P(X=2) = C_4^2 \times \left(\frac{1}{8}\right)^2 \times \left(1-\frac{1}{8}\right)^{4-2} = \frac{147}{2048}$.
3. Calculer la probabilité d'avoir tiré au moins un roi.
   $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0) = 1 - C_4^0 \times \left(\frac{1}{8}\right)^0 \times \left(\frac{7}{8}\right)^4 = \frac{1695}{4096}$.
4. Calculer $E(X)$. Le jeu est-il rentable pour l'organisateur ?
   $E(X) = n \times p = 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2} = 0.5$. En moyenne, le joueur va tirer $\frac{1}{2}$ roi, si bien qu'il aura un gain moyen de 2.5€(0€pour 0 roi tiré et 5€pour un roi tiré). Le jeu est donc rentable pour l'organisateur (qui touche 5€par partie).
5. Calculer la variance de X et déduire son écart-type.
   $V(X) = n \times p \times (1-p) = 4 \times \frac{1}{8} \times \left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{7}{16}$ et $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \approx 0.661$.
6. En utilisant les questions précédentes, déterminer le prix pour lequel le jeu devient rentable pour le joueur.
   Dans la mesure où le gain moyen du joueur est 2.5€, le jeu devient rentable pour le joueur pour un prix de partie inférieur à 2.5€.

Corrigé n°15 Au sein du département Techniques de Commercialisation, le responsable du département a constaté que 3% des tables sont abîmées. Un réparateur doit remplacer les 20 tables. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre des tables abîmées.

1. Préciser la loi de probabilité suivie par X. Il s'agit d'une expérience aléatoire admettant deux issues : succès (avoir des tables abîmées de probabilité $p = 0.03$) et échec (ne pas avoir de tables abîmées). On répète l'expérience aléatoire 20 fois de manière indépendante. X compte le nombre de succès. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0.03$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n = 10; p = 0.03)$.
2. Déterminer la probabilité qu'il y en ait aucune table abîmées.
$P(X = 0) = C_{20}^{0} \times 0.03^{0} \times (1 - 0.03)^{20} \approx 0.5438$.
3. Déterminer la probabilité qu'il y en ait au moins une table abîmée.
On répond à cette question en utilisant la complémentarité (ne pas avoir de tables abîmées). On a $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.5438 \approx 0.4562$.

Corrigé n°16 Un livreur Uber Eats doit rendre visite à 7 clients. Il sait que la probabilité d'obtenir une commande est la même pour tous ses clients et que sa valeur est de 0.3. On admet que la décision de chaque client est indépendante des autres. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de clients qui ont passé une commande.

1. Justifier que X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
On répète 7 fois la même expériene à 2 issues de manière indépendante. X compte le nombre de succès. Donc, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = 0.3$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n = 7; p = 0.3)$.
2. Déterminer la probabilité pour que le commercial obtient exactement trois commandes.
$$P(X = 3) = C_{7}^{3} \times 0.3^{3} \times (1 - 0.3)^{7-3} = C_{7}^{3} \times 0.3^{3} \times (1 - 0.3)^{4}$$
3. Déterminer la probabilité pourque le commercial n'obtient aucune commande.
$$P(X = 0) = C_{7}^{0} \times 0.3^{0} \times (1 - 0.3)^{7-0} = C_{7}^{0} \times (1 - 0.3)^{7} =$$
4. Le commercial a-t-il plus d'une chance sur deux d'obtenir au moins deux commandes ?
$$\begin{aligned} P(X \geqslant 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \\ &= 1 - \left(C_{7}^{0} \times 0.3^{0} \times (1 - 0.3)^{7-0} + C_{7}^{1} \times 0.3^{1} \times (1 - 0.3)^{7-1}\right) \end{aligned}$$
5. Calculer $E(X)$ et $V(X)$. Pour répondre à cette question, il faut donner la loi de probabilité de X.

Valeurs x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X = x_i)$	$\frac{10}{120}$	$\frac{40}{120}$	$\frac{40}{120}$	$\frac{24}{120}$	$\frac{6}{120}$			

Corrigé n°17 Pour se rendre à l'IUT de Tarbes, un étudiant utilise les transports en communs 4 fois par jour. La probabilité d'être contrôlé est 0.01.

1. Peut-on associer cette expérence aléatoire à une loi binomiale ?
   Il s'agit d'une expérience aléatoire admettant deux issues :
   — succès : "étudiant est contrôlé pendant le trajet"
   — échec : "étudiant n'est pas contrôlé pendant le trajet".
   Cette expérience est une épreuve de Bernoulli. On répète cette expérience aléatoire 4 fois de manière indépendantes (les contôles sont indépendants) : c'est un schéma de Bernoulli.
   la variable aléatoire X est associée au nombre de fois que l'étudiant soit contrôlé. Donc, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n=4;p=0.01)$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n=4;p=0.01)$.
2. Déterminer la probabilité pour que l'étudiant ne soit pas contrôlé pendant la journée.
   $P(X=0) = C_4^0 \times 0.01^0 \times (1-0.01)^{4-0} = 0.99^4 \approx 0.9606$.
3. Déterminer la probabilité pour que l'étudiant soit contrôlé une fois par jour.
   $P(X=1) = C_4^1 \times 0.01^1 \times (1-0.01)^{4-1} = 4 \times 0.01 \times 0.99^3 \approx 0.0388$.
4. Déterminer la probabilité pour que l'étudiant soit contrôlé deux fois par jour.
   $P(X=2) = C_4^2 \times 0.01^2 \times (1-0.01)^{4-2} = 6 \times 0.01^2 \times 0.99^2 \approx 5.881 \times 10^{-4}$.
5. Déterminer la probabilité pour que l'étudiant soit contrôlé trois fois par jour.
   $P(X=3) = C_4^3 \times 0.01^3 \times (1-0.01)^{4-3} = 4 \times 0.01^3 \times 0.99 \approx 3.96 \times 10^{-6}$.
6. Déterminer la probabilité pour que l'étudiant soit contrôlé quatre fois par jour.
   $P(X=4) = C_4^4 \times 0.01^4 \times (1-0.01)^{4-4} = 1 \times 0.01^4 \times 0.99^0 \approx 10^{-8}$.
7. Déterminer la probabilité pour que l'étudiant soit contrôlé au plus trois fois par jour.
   $P(X \leqslant 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0.9606 + 0.0388 + 5.88 \times 10^{-4} + 3.96 \times 10^{-6} = 0.999$.
   On peut répondre à cette question en utilisant l'événement complémentaire, c'est-à-dire : $P(X \leqslant 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - P(X=4)$.

Corrigé n°18 Dans une entreprise les ressources humaines font passer une entrevue préliminaire à 5 et on sait par expérience que seulement 50% passent au travers de ce premier tri.

1. Déterminer la probabilité qu'il y en ait au moins 2 qui passent la première entrevue ?
   Il s'agit d'une expérience aléatoire admettant deux issues :
   — succès : " candidats qui passent la première entrevue"
   — échec : "candidats qui ne passent pas la première entrevue".
   Cette expérience est une épreuve de Bernoulli. On répète cette expérience aléatoire 5 fois de manière indépendantes (5 canidats différents) : c'est un schéma de Bernoulli.
   la variable aléatoire X est associée au nombre de candidats sur 5 passant la première entrevue. Donc, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n=5;p=0.5)$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n=5;p=0.5)$.
   La probabilité qu'il y en ait au moins 2 candidats qui passent la première entrevue est :
   $$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X<2) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$$
2. Déterminer la probabilité qu'il y en ait 4 ou plus qui passent la première entrevue ? Il existe deux manières pour répondre à cette question :

— soit $P(X \geqslant 4) = P(X=4)+P(X=5) = C_5^4 \times 0.5^4 \times (1-0.5)^{5-4} + C_5^5 \times 0.5^5 \times (1-0.5)^{5-5}$. Donc

$$P(X \geqslant 4) = C_5^4 \times 0.5^4 \times (1-0.5) + C_5^5 \times 0.5^5 \times (1-0.5)^0 = (5 \times 0.5^4 \times 0.5) + (1 \times 0.5^5 \times 1) \approx 0.1875.$$

— soit $P(X \geqslant 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leqslant 3) = 1 - [P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)]$. Donc

$$P(X \geqslant 4) = 1 - \Big[C_5^0 \times 0.5^0 \times (1-0.5)^{5-0} + C_5^1 \times 0.5^1 \times (1-0.5)^{5-1} + C_5^2 \times 0.5^2 (1-0.5)^{5-2} + C_5^3 \times 0.5^3 (1-0.5)^{5-3}\Big] = 1 - 0.8124 \approx 0.1875.$$