
Corrigé n°1
Rappel : soit A un sous-ensemble de E (A peut être E lui-même). On appelle cardinal de A et on note $card(A)$ le nombre d'éléments de A.

— La combinatoire (ou analyse combinatoire) étudie comment compter des objets. Elle fournit des méthodes de dénombrement particulièrement utiles en probabilité. Un des principaux exemples que nous verrons est la formule du binôme de Newton. Commençons par nous intéresser à deux exemples très simples.

— Exemple :On effectue trois tirages successifs de pile ou face. Les différents tirages possibles sont : PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF. soit $2^3 = 8$ tirages possibles.
Si on s'intéresse, par exemple, aux tirages avec au moins une fois pile, on s'aperçoit qu'il y en a 7 sur 8. On peut également présenter la liste des tirages sous forme d'un arbre :
Les différents tirages sont alors représentés par chacun des huit chemins de l'arbre. Ici, l'ordre d'apparition de P ou F est important et il peut y avoir des répétitions.

— Si on cherche à compter le nombre de codes secrets (par exemple, de carte bleue) à 4 chiffres, il est hors de question de faire la liste de tous les codes possibles. En revanche, chaque chiffre du code est entre 0 et 9, soit 10 possibilités. Comme on a 4 chiffres dans le code, on a au total 104 = 10000 possibilités. Ainsi, il n'existe que 10000 codes à 4 chiffes différents.

On considère un jeu de 32 cartes. Soient A let B deux sous-ensembles de E représentant respectivement les couleurs rouges et les figures. Calculer le cardinal de : A, B et $A \cup B$.
On a $card(E) = 32$, $card(A) = 16$, $card(B) = 12$.

Corrigé n°2 McDonald's propose sur sa carte 5 entrées, 3 plats et 4 desserts. Lina décide d'aller déjeuner tous les jours à McDonald's, mais a dit qu'elle n'irait plus dès qu'elle serait contraint de composer un menu qu'elle a déjà consommé.

1. Au bout de combien de jours Lina devra t-elle changer McDonald's ?
On note E_1 l'ensemble des entrées, E_2 l'ensemble des plats et E_3 l'ensemble des desserts. Un menu est un triplet de l'ensemble $E_1 \times E_2 \times E_3$. Or $card(E_1 \times E_2 \times E_3) = card(E_1) \times card(E_2) \times card(E_3) = 5 \times 3 \times 4 = 60$.
On peut donc composer 60 menus différents dans McDonald's. Ainsi, Lina devra changer McDonald's au bout de 60 jours.

Corrigé n°3 On dispose d'une urne contenant trois boules différentes, numérotées 1, 2 et 3 et on en tire deux (sans remise) parmi les trois. Combien de tirages différents peut-on effectuer ? Ici, l'ordre est important mais il n'y a pas de répétition. Soit m et n deux entiers naturels tels que$m \leqslant n$. Un arrangement de n éléments parmi m est une liste ordonée de n éléments distincts d'un ensemble à m éléments. On note A_m^n le nombre d ?arrangements de n éléments parmi m et alors $A_m^n = m(m-1)\cdots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$.
Un tirage correspond à un arrangement de deux éléments parmi trois. En effet, l'ordre de tirage est important mais on effectue le tirage sans remise donc il ne peut y avoir de répétitions. On a donc $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$ tirages possibles. Dans ce cas, on peut encore faire la liste exhaustive de ces différents tirages, par exemple sous forme d'arbre.

Corrigé n°4 On dispose d'un jeu de 52 cartes. On tire 5 cartes simultanément. Combien y a-t-il de mains :

Il s'agit de tirages simultanés : on utilise donc des combinaisons.

1. au total ? $C_{52}^{5} = \binom{52}{5} = 2598960$ mains.
2. comportant uniquement des cartes rouges ? $C_{26}^{5} = \binom{26}{5} = 65780$ mains.
3. comportant uniquement des ♦ ? $C_{13}^{5} = \binom{13}{5} = 1287$ mains.
4. comportant uniquement des figures ? $C_{12}^{5} = \binom{12}{5} = 792$ mains.
5. comportant les 4 as ? $C_{4}^{4} \times C_{48}^{1} = \binom{4}{4} \times \binom{48}{1} = 48$ mains
6. comportant exactement 3 rois ? $C_{4}^{3} \times C_{48}^{2} = \binom{4}{3} \times \binom{48}{2} = 4512$ mains.
7. comportant exactement 3 dames et 2 valets ? $C_{4}^{3} \times C_{4}^{2} = \binom{4}{3} \times \binom{4}{2} = 24$ mains.
8. comportant exactement 3 as et 2 cartes de valeurs différentes ? Soit $C_{4}^{3} \times C_{12}^{1} \times C_{4}^{1} = \binom{4}{3} \times \binom{12}{1} \times \binom{4}{1} = 48$ mains car parmi les douze valeurs restantes en exceptant les as, il faut en choisir deux et tirer une carte de chacune de ces deux valeurs.

Corrigé n°5 Une urne contient 10 boules ①, ②, ③, ④,⑤, ⑥, ⑦, ⑧, ⑨ et ⑩. Combien y'a-t-il de tirages au total :

1. si on tire trois boules successivement sans remise ?
   il s'agit d'arrangements, soit $A_{10}^{3} = 10 \times 9 \times 8 = 720$ tirages.
2. si on tire quatre boules successivement avec remise ?
   il s'agit de triplets, soit $10^4 = 10000$ tirages.
3. si on tire cinq boules simultanément ?
   il s'agit de combinaisons, soit $C_{10}^{5} = \binom{10}{5} = 252$ tirages.

Corrigé n°6

1. Soient A et B deux événements d'un même univers Ω tels que : $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.4$ et $P(A \cap B) = 0.3$.
   (a) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$.
   (b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.4 - 0.3 = 0.6$.
   (c) $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$.
   (d) $P_B(A) = \frac{P(A \cap B}{P(B)} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$.
2. Soient A et B deux événements d'un même univers Ω tels que : $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.6$ et $P_A(B) = 0.2$.

(a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.4 = 0.6.$

(b) $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - 0.2 = 0.8.$

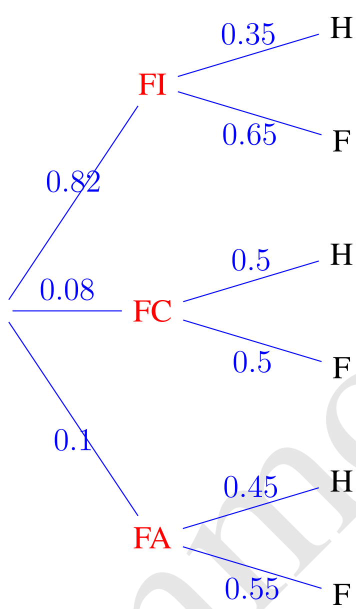
(c) $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = 0.2 \times 0/4 = 0.08.$

(d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.6 - 0.08 = 0.92.$

3. Soient A et B deux événements d'un même univers Ω tels que : $P(A) = 0.5$, $P_A(B) = 0.6$ et $P_B(B) = 0.8$.
   (a) $P(A \cap B) = P_a(B) \times P(A) = 0.6 \times 0.5 = 0.3$
   (b) $P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P_B(A)} = \frac{0.3}{0.8} = 0.375.$
   (c) $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \Longrightarrow P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.375 - 0.3 = 0.075.$
   (d) $P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0.075}{1 - 0.5} = 0.15.$

Corrigé n°7 Dans un département "techniques de commercialisation", trois formations sont proposées : formation initiale (FI), formation continue (FC) et formation par alternance (FA). On sait que : 8% des étudiants sont inscrits en FC ;10% des étudiants sont inscrits en FA ; Les femmes représentent : 65% des inscrits en FI ; 50% des inscrits en FC ; 55% des inscrits en FA.

1. Représenter ce situation à l'aide d'un arbre de probabilité que l'on complétera dans la suite de l'exercice.



$P(H \cap FI) = P_{FI}(H) \times P(FI) = 0.35 \times 0.82 = 0.287$

$P(FI \cap F) = P_{FI}(F) \times P(FI) = 0.65 \times 0.82 = 0.533$

$P(FC \cap H) = P_{FC}(H) \times P(FC) = 0.5 \times 0.08 = 0.04$

$P(FC \cap F) = P_{FC}(F) \times P(FC) = 0.5 \times 0.08 = 0.04$

$P(FA \cap H) = P_{FA}(H) \times P(FA) = 0.45 \times 0.1 = 0.045$

$P(FA \cap F) = P_{FA}(F) \times P(FA) = 0.55 \times 0.1 = 0.055$

2. On choisit un étudiant au hasard.
   — Déterminer la probabilité que cet étudiant soit une femme en FA.
   $P(F \cap FA) = P_{FA}(F) \times P(FA) = 0.55 \times 0.1 = 0.055.$
   — Déterminer la probabilité que cet étudiant soit un homme.
   $P(H) = P(H \cap FI) + P(H \cap FC) + P(H \cap FA) = (1 - 0.65) \times (1 - 0.08 - 0.1) + (1 - 0.5) \times 0.08 + (1 - 0.55) \times 0.1 = 0.372.$
   — Déterminer la probabilité que cet étudiant soit un homme ou en FC.
   $P(H \cup FC) = P(H) + P(FC) - P(H \cap FC) = 0.372 + 0.08 - 0.08 \times 0.5 = 0.412.$
   — Déterminer la probabilité que cet étudiant soit en FI sachant que c'est un homme.
   $P_H(FI) = \frac{P(H \cap FI}{P(H)} = \frac{0.82 \times 0.35}{0.372} \approx 0.7715.$