TC - Techniques quantitatives et représentations
Corrigé de travaux dirigés n° 2

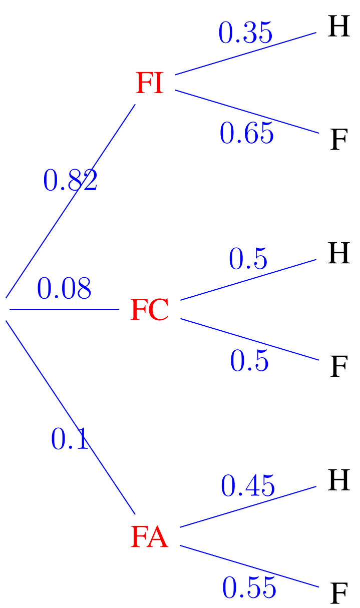
———-

Arbres de probabilités, Espérance, Variance, loi binomiale et son approximation

Semestre : 3
A.U. : 2022-2023
Prof. H. El-Otmany

Corrigé n°1 Dans un département "techniques de commercialisation", trois formations sont proposées : formation initiale (FI), formation continue (FC) et formation par alternance (FA). On sait que : 8% des étudiants sont inscrits en FC; 10% des étudiants sont inscrits en FA; les femmes représentent : 65% des inscrits en FI; 50% des inscrits en FC et 55% des inscrits en FA.

1. Représenter ce situation à l'aide d'un arbre de probabilité que l'on complétera dans la suite de l'exercice.



$P(H \cap FI) = P_{FI}(H) \times P(FI) = 0.35 \times 0.82 = 0.287$

$P(FI \cap F) = P_{FI}(F) \times P(FI) = 0.65 \times 0.82 = 0.533$

$P(FC \cap H) = P_{FC}(H) \times P(FC) = 0.5 \times 0.08 = 0.04$

$P(FC \cap F) = P_{FC}(F) \times P(FC) = 0.5 \times 0.08 = 0.04$

$P(FA \cap H) = P_{FA}(H) \times P(FA) = 0.45 \times 0.1 = 0.045$

$P(FA \cap F) = P_{FA}(F) \times P(FA) = 0.55 \times 0.1 = 0.055$

2. On choisit un étudiant au hasard.
   — Déterminer la probabilité que cet étudiant soit une femme en FA.
   $P(F \cap FA) = P_{FA}(F) \times P(FA) = 0.55 \times 0.1 = 0.055$.
   — Déterminer la probabilité que cet étudiant soit un homme.
   $P(H) = P(H \cap FI) + P(H \cap FC) + P(H \cap FA) = (1-0.65) \times (1-0.08-0.1) + (1-0.5) \times 0.08 + (1-0.55) \times 0.1 = 0.372$.
   — Déterminer la probabilité que cet étudiant soit un homme ou en FC.
   $P(H \cup FC) = P(H) + P(FC) - P(H \cap FC) = 0.372 + 0.08 - 0.08 \times 0.5 = 0.412$.
   — Déterminer la probabilité que cet étudiant soit en FI sachant que c'est un homme.
   $P_H(FI) = \frac{P(H \cap FI}{P(H)} = \frac{0.82 \times 0.35}{0.372} \approx 0.7715$.

Corrigé n°2 On tire simultanément au hasard 3 jetons dans un jeu de 10 jetons. Les jetons sont numérotés comme suit :$1; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 2; 3$. Le prix de la participation à ce jeu est 5 euros.
On appelle X la variable aléatoire égale au gain qui correspond à la somme obtenue en additionnant les nombres portés sur chaque jeton.

1. Déterminer l'univers Ω (ensemble des cas possibles pour l'expérience aléatoire) :

Univers Ω	$(1;1;1)$	$\cdots$	$\cdots$	$(1;1;2)$	$\cdots$	$(1;2;2)$	$\cdots$	$(2;2;2)$	$(2;2;3)$
Valeurs x_i	3	$\cdots$	$\cdots$	4	$\cdots$	5	$\cdots$	6	7

On en déduit le nombre des cas possibles : $C_{10}^3 = \binom{10}{3} = 120$ et le valeurs de Ω : $X(\Omega) = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

2. Déterminer la loi de probabilité de X. Ici, on calcule les probabilités associées à chaque valeur x_i. Par définition, on a

$$P(\texttt{Evénement}) = \frac{\texttt{Nombre de cas favorables}}{\texttt{Nombre de cas possibles}} = \frac{card(\texttt{Evénement})}{card(\Omega)}.$$

On a donc

$$P(X=3) = \frac{C_5^3 \times C_4^0 \times C_1^0}{C_{10}^3} = \frac{10}{120}$$
$$P(X=4) = \frac{C_5^2 \times C_4^1 \times C_1^0}{C_{10}^3} = \frac{40}{120}$$
$$P(X=5) = \frac{C_5^1 \times C_4^2 \times C_1^0 + C_5^2 \times C_4^0 \times C_1^1}{C_{10}^3} =$$
$$P(X=6) = \frac{C_5^1 \times C_4^1 \times C_1^1 + C_5^0 \times C_3^0 \times C_0^1}{C_{10}^3} = \frac{24}{120}$$
$$P(X=7) = \frac{C_5^0 \times C_4^2 \times C_1^1}{C_{10}^3} = \frac{6}{120}$$

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est

Valeurs x_i	3	4	5	6	7
$P(X=x_i)$	$\frac{10}{120}$	$\frac{40}{120}$	$\frac{40}{120}$	$\frac{24}{120}$	$\frac{6}{120}$

On vérifie facilement que la somme des probabilités vaut 1.

3. Calculer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il intéressant pour l'organisateur ?
Par définition, on a

$$E(X) = x_1 \times P(X=x_1) + x_2 \times P(X=x_2) + x_3 \times P(X=x_3) + x_4 \times P(X=x_4) + x_5 \times P(X=x_5)$$
$$= 3 \times \frac{10}{120} + 4 \times \frac{40}{120} + 5 \times \frac{40}{120} + 6 \times \frac{24}{120} + 7 \times \frac{6}{120} = 4.8$$

Le jeu n'est pas intéressant car le gain moyen $E(X) = 4.8$€ est inférieur au prix de participation (5€.)

4. Calculer la variance $V(X)$. En déduire σ_X. Ici on souhaite mesurer l'écart par rapport à la moyenne : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} V(X) &= x_1^2 \times P(X=x_1) + x_2^2 \times P(X=x_2) + x_3^2 \times P(X=x_3) + x_4^2 \times P(X=x_4) \\ &\quad + x_5^2 \times P(X=x_5) - [E(X)]^2 \\ &= 3^2 \times \frac{10}{120} + 4^2 \times \frac{40}{120} + 5^2 \times \frac{40}{120} + 6^2 \times \frac{24}{120} + 7^2 \times \frac{6}{120} - 4.8^2 \\ &= 1.02 \end{aligned}$$

Par conséquent, $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1.02} \approx 1$€.

Remarque

— plus l'écart-type est proche de 0, plus le risque de perte est faible.

— plus l'écart-type est proche de l'espérance, plus le risque de perte est grand.

Corrigé n°3 On considère la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20; 0.36)$.. Calculer $P(X=3)$, $P(X \leqslant 4)$ et $P(X \geqslant 6)$.

— $P(X=3) = C_{20}^{3} \times 0.36^{3} \times (1-0.36)^{20-3} = 1140 \times 0.36^{3} \times 0.64^{17} \approx 0.02697$.

— $P(X \leqslant 4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$

$$\begin{aligned}
P(X \leqslant 4) &= 1 \times (1-0.36)^{20} + C_{20}^{1} \times 0.36^{1} \times (1-0.36)^{20-1} + C_{20}^{2} \times 0.36^{2} \times (1-0.36)^{20-2} \\
&\quad + C_{20}^{3} \times 0.36^{3} \times (1-0.36)^{20-3} + C_{20}^{4} \times 0.36^{4} \times (1-0.36)^{20-4} \\
&= 1 \times 0.64^{20} + 20 \times 0.36^{1} \times 0.64^{19} + 190 \times 0.36^{2} \times 0.64^{18} \\
&\quad + 1140 \times 0.36^{3} \times 0.64^{17} + 4845 \times 0.36^{4} \times 0.64^{16} \approx 0.1011.
\end{aligned}$$

— $P(X \geqslant 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - P(X \leqslant 5) = 1 - [P(X \leqslant 4) + P(X=5)] = 1 - [C_{20}^{5} \times 0.36^{5} \times (1-0.36)^{20-5}] = 1 - [0.1011 + 15504 \times 0.36^{5} \times 0.64^{15}] \approx 0.7828$.

— $P(3 \leqslant X \leqslant 5) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = 1140 \times 0.36^{3} \times 0.64^{17} + 4845 \times 0.36^{4} \times 0.64^{16} + 15504 \times 0.36^{5} \times 0.64^{15} \approx 0.2438$.

Corrigé n°4 Au sein du département Techniques de Commercialisation, le responsable du département a constaté que 3% des tables sont abîmées. Un réparateur doit remplacer les 20 tables. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre des tables abîmées.

1. Préciser la loi de probabilité suivie par X. Il s'agit d'une expérience aléatoire admettant deux issues : succès (avoir des tables abîmées de probabilité $p = 0.03$) et échec (ne pas avoir de tables abîmées). On répète l'expérience aléatoire 20 fois de manière indépendante. X compte le nombre de succès. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0.03$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n = 10; p = 0.03)$.

2. Déterminer la probabilité qu'il y en ait aucune table abîmées.
$P(X=0) = C_{20}^{0} \times 0.03^{0} \times (1-0.03)^{20} \approx 0.5438$.

3. Déterminer la probabilité qu'il y en ait au moins une table abîmée.
On répond à cette question en utilisant la complémentarité (ne pas avoir de tables abîmées). On a $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0.5438 \approx 0.4562$.