Toulouse School of Economics

Prof. H. El-Otmany

OPTIMISATION
CORRIGÉ DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 1

UNIVERSITÉ TOULOUSE CAPITOLE

Exercice n°1 Déterminer les dévéloppements limités suivants :
Dans cet exercice, il suffit d'écrire le $DL(0)$ à l'ordre demandée et ensuite effectuer les opération de multiplicarion ou de division selon vos souhaits.

1. À l'ordre 3 en 0 de $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$
   En écrivant les $DL(0)_3$ de e^x et $\frac{1}{1-x}$, puis en tonquant à l'ordre 3 pour trouver la partie régulière de f (produit des deux fonctions), on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + x^2 + x^3 + x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + 2x + \frac{5}{4}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

2. À l'ordre 4 en 0 de $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$
   En écrivant les $DL(0)_4$ de $(1-x)^\alpha$ et $(1+x)^\alpha$ pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\frac{x^2}{2!} + \frac{3}{8}\frac{x^3}{3!} - \frac{15}{16}\frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) + \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\frac{x^2}{2!} - \frac{3}{8}\frac{x^3}{3!} - \frac{15}{16}\frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) \\ &= 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{15}{8}\frac{x^4}{4!} + o(x^4) \end{aligned}$$

3. À l'ordre 4 en 0 de $f(x) = \cos(x)\ln(1+x)$
   En écrivant les $DL(0)_4$ de $\ln(1+x)$ et $\cos(x)$, puis en tonquant à l'ordre 4 pour trouver la partie régulière de f (produit de $\cos(x)$ et $\ln(1+x)$), on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \end{aligned}$$

   Remarque : comme la valuation de la fonction $\ln(1+x)$ a le plus bas degrés 1 pour le premier terme non nul, donc nous n'avons pas besoin de $DL(0)$ de $\cos(x)$ jusqu'à l'ordre 4. En effet, le produit des deux $DL(0)$ augmentera de degrés 1 le $DL(0)$ résultant. Vous pouvez reproduire le résultat avec $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$

4. À l'ordre 3 en 0 de $f(x) = (x^3+1)\sqrt{1-x}$
   Comme $x \longmapsto (x^3+1)$ est une fonction polynômiale, donc il suffit d'écrire le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $(1-x)^\alpha$ pour $\alpha = \frac{1}{2}$. On ainsi

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3+1)\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{3}{48}x^3 + o(x^3)\right) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{3}{48}x^3 + x^3 + o(x^3) \\ &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{15}{16}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

5. À l'ordre 4 en 0 de $f(x) = [\ln(1+x)]^2$
On écrit le $DL_4(0)$ de $\ln(1+x)$ et on calcule le $DL_4(0)$ de $[\ln(1+x)]^2$ en conservant que les puissances d'ordre 4. On obtient ainsi

$$f(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)^2 = x^2 - x^3 + \frac{11x^4}{12} + o(x^4)$$

6. À l'ordre 4 en 0 de $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$
En posant $u = x + x^2$ afin de réexprimer la fonction f en termes de $\frac{1}{1+u}$, puis en réalisant le développement limité usuel en 0 à l'ordre 4. On a ainsi

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o(u^4)$$

En remplaçant u par son expression et en gardant que les termes de puissances 4 afin d'obtenir un $DL(0)$ à l'ordre 4,

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - (x+x^2) + (x+x^2)^2 - (x+x^2)^3 + (x+x^2)^4 + o(x^4) \\ &= 1 - (x+x^2) + (x^2 + 2x^3 + x^4) - (x^3 + 3x^4) + x^4 + o(x^4) \\ &= 1 - x + x^3 - x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

7. À l'ordre 2 en 0 de $f(x) = \frac{\sin(x)-1}{1+\cos(x)}$
On a les dévéloppements limités usuels en 0 des fonctions suivantes à l'ordre 2 :

$$\sin(x) = x + o(x^2)$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Ainsi

$$\sin(x) - 1 = -1 + x + o(x^2)$$
$$\cos(x) + 1 = 2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

On calcule maintenant le DL(0) de $\frac{1}{1+\cos(x)}$:

$$\frac{1}{1+\cos(x)} = \frac{1}{2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2)}$$

En posant $u = \frac{x^2}{4} + o(x^2)$ afin de réexprimer la fonction $\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x^2}{4}+o(x^2)}$ en termes de $\frac{1}{1-u}$, puis en réalisant le développement limité usuel en 0 à l'ordre 1. On obtient donc

$$\frac{1}{2}\frac{1}{1-u} = \frac{1}{2}(1 + u + o(u))$$
$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right) = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

En injectant le $DL(0)$ de $\sin(x) - 1$ dans la dernière équation, on arrive à

$$f(x) = \left(-1 + x + o(x^2)\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

8. À l'ordre 3 en 0 de $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$
Il s'agit d'un rapport de fonctions dont les limites tendent vers 0 lorsque x tend vers 0. L'évaluation de leurs développements limités révèle que le premier terme non nul a un degré de 1. Par conséquent, nous pourrons simplifier les développements limités en 0 en factorisant x tant dans le numérateur que dans le dénominateur. Cette simplification entraîne une diminution d'une unité dans l'ordre du développement limité en 0. On écrit ainsi les DL jusqu'à l'ordre 4 en 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)} \\ &= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)\left(\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}\right) \end{aligned}$$

Posons $u = \frac{x^2}{6} + o(x^3)$ pour écrire le DL(0) de dénominateur en utilisant le DL(0) usuel de $\frac{1}{1-u}$. Comme $u^2 = \frac{x^4}{36} + o(x^4)$ et nous avons besoin de DL(0) à l'ordre 3, donc il suffit d'écrire le DL(0) jusqu'à l'odre 1 (vous pouvez aussi utiliser le DL(0) à l'ordre 2 et enfin conserver les puissances d'ordre 3), on a

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)} = \frac{1}{1-u} = 1 + u + o(u) = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)$$

Par produit de DL(0), il vient que

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

9. À l'ordre 5 en 0 de $f(x) = \cos(x)^{\sin(x)}$
En écrivant $f(x) = \cos(x)^{\sin(x)} = e^{\sin(x)\ln(\cos(x))}$ et en utilisant les DL(0) de

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\ \ln(1+u) &= u - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \end{aligned}$$

on obtient à l'aide de changement de variable $u = \cos(x) - 1$ qui tend vers 0 lorsque $x \longrightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \ln(\cos(x)) = \ln(1 + \cos(x) - 1) = \ln(1+u) &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + o(x^4) \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4) \end{aligned}$$

Par produit de DL(0), on a

$$\begin{aligned} \sin(x)\ln(\cos(x)) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)\right) = -\frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{12} - \frac{x^5}{12} + o(x^5) \\ &= -\frac{x^3}{2} + o(x^5) \end{aligned}$$

Comme $e^v = 1 + v + o(v)$ en 0, on a

$$f(x) = e^{\sin(x)\ln(\cos(x))} = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^5)$$

10. À l'ordre 5 en 0 de $f(x) = \arccos(x)$
On procède par le calcul de la dérivée f et on effectue le DL de cette dérivée. Comme la fonction $\arccos$ est dérivable en 0, et sa dérivée vaut

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Cette fonction est de classe C^∞ autour de 0, donc elle admet au moins un DL à l'ordre 4 en 0. Pour le déterminer, on écrit d'abord le DL(0) de

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + o(x^4)$$

Posons $u = x^2 + x^4 + o(x^4)$ et effectuons le DL(0) de $(1-u)^{-1/2}$, on a

$$-\frac{1}{\sqrt{1-u}} = -(1-u)^{-1/2} = -1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{8} + o(u^2)$$

Remarquons que $u^2 = x^4 + o(x^4)$, il vient que

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -1 - \frac{x^2+x^4}{2} + \frac{(x^2+x^4)^2}{8} + o(x^4) = -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$
$$= -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$$

En intégrant ce développement limité entre 0 et x en tenant compte de $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, on obtient

$$f(x) = \int_0^x f'(t)dt = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$$

11. À l'ordre 5 en 0 de $f(x) = \int_0^x e^{t^2/2}dt$
Il s'agit ici d'uiliser la primitive de dévéloppement limité en 0. f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^{x^2/2}$. On écrit maintenant le DL(0) de f' :

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$
$$f'(t) = e^{t^2/2} = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + o(t^4)$$

Comme $f(0) = 0$, on a par intégration entre 0 et x :

$$f(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x e^{t^2/2}dt == \int_0^x (1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + o(t^4))dt$$
$$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} + o(x^5)$$

Exercice n°2 Déterminer les développements limités suivants
Remaque : dans cet exercice, vous pouvez utiliser la définition de DL(x_0) pour une fonction indéfiniment dérivable :

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o((x-x_0)^n)$$

où $f^{(k)}$ est la dérivée d'ordre k de f.

Néanmoins, afin d'optimiser le processus et éviter le calcul des dérivées d'ordre k de f, nous employons des changements de variables appropriés permettant l'application des développements limités classiques en 0.

1. À l'ordre 3 en 2 de $f(x) = \frac{1}{x}$
   Posons $u = \frac{x-2}{2}$, on

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} = \frac{1}{2+(x-2)} = \frac{1}{2(1+\frac{x-2}{2})} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+u}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x-2}{2} + \left(\frac{x-2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-2}{2}\right)^3 + o((x-2)^3)\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{4} + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + o((x-2)^3) \end{aligned}$$

2. À l'ordre 3 en 2 de $f(x) = \sqrt{x}$
   On a, par changement de variable $u = \frac{x-2}{2}$,

$$f(x) = \sqrt{x} = \sqrt{x-2+2} = \sqrt{2\left(1+\frac{x-2}{2}\right)} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{x-2}{2}} = \sqrt{2}\sqrt{1+u}$$

   En écrivant le DL(0) de $\sqrt{1+u} = (1+u)^{1/2}$ en 0 (en effet $u = \frac{x-2}{2}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0), il vient que

$$\sqrt{2}(1+u)^{1/2} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{u}{2} - \frac{1}{4}\frac{u^2}{2!} + \frac{3}{8}\frac{u^3}{3!} + o(u^3)\right)$$

   Ainsi, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2}\left(1 + \frac{(x-2)}{4} - \frac{1}{4}\frac{(x-2)^2}{8} - \frac{3}{8}\frac{(x-2)^3}{48} + o((x-2)^3)\right) \\ &= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(x-2) - \frac{\sqrt{2}}{32}(x-2)^2 - \frac{3\sqrt{2}}{304}(x-2)^3 + o((x-2)^3) \end{aligned}$$

Exercice n°3 Déterminer les développements limités suivants :

1. À l'ordre 3 en $+\infty$ de $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$
   Par un simple calcul au voisinage de $+\infty$ ($x > 0$), on a $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} = \sqrt{1 + \frac{2}{x}}$. Posons $u = \frac{2}{x}$ et écrivant le DL(0) de $\sqrt{1+u}$ à l'ordre 3 :

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{3u^3}{48} + o(u^3)$$

   On a ainsi

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{2}{2x} - \frac{4}{8x^2} + \frac{3 \times 2^3}{48x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \end{aligned}$$

2. À l'ordre 4 en $+\infty$ de $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \ln(x)$
   On commence par simplifier f :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x}\right) = \ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$$

   On pose $u = \frac{1}{x}$ et on écrit le $DL(0)$ à l'ordre 3 de $\sqrt{1+u^2} = (1+u^2)^{1/2}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) = \ln\left(1 + \sqrt{1+u}\right) &= \ln\left(1 + 1 + \frac{u^2}{2} - \frac{1}{4}\frac{u^4}{2!} + o(u^4)\right) = \ln\left(2 + \frac{u^2}{2} - \frac{1}{4}\frac{u^4}{2!} + o(u^4)\right) \\ &= \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{u^2}{4} - \frac{1}{8}\frac{u^4}{2!} + o(u^4)\right) \\ &= \ln(2) + \ln(1+v) \end{aligned}$$

   où $v = \frac{u^2}{4} - \frac{u^4}{16} + o(u^4)$. Par composition de DL au voisinage de 0 de $\ln(1+v) = v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} - \frac{v^4}{4} + o(v^4)$, on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(2) + \frac{u^2}{4} - \frac{u^4}{16} - \frac{u^4}{32} + o(u^4) = \ln(2) + \frac{u^2}{4} - \frac{3u^4}{32} + o(u^4) \\ &= \ln(2) + \frac{1}{4x^2} - \frac{3}{32x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \end{aligned}$$

Exercice n°4 Déterminer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$
   On écrit le DL(0) de $\sin(x)$ à l'ordre 3 :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x}{x^3} = \lim_{x \longrightarrow 0} -\frac{1}{3!} + o(1) = -\frac{1}{6}$$

   Remarque : on peut vérifier ce résultat par la règle de l'Hopital (faite en classe).

2. $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln(x)$
En utilisant le DL($+\infty$) de $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln(x)$ de l'exercice 2, on a

$$f(x)=\ln(2)+\frac{1}{4x^2}-\frac{3}{32x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

Par conséquant,

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln(x)=\lim_{x\longrightarrow+\infty} \ln(2)+\frac{1}{4x^2}-\frac{3}{32x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)=\ln(2).$$

Exercice n°5 Faire un dessin de la tangente et en précisant la position de la courne par rapport à la tangente des fonctions suivantes

1. en 0 de $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$
En combinant les Dl(0) de e^x et $\frac{1}{1+u}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3, on obtient

$$f(x)=\frac{1}{1+e^x}=\frac{1}{1+1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)}$$

Posons $u=\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)$, on en déduit que

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2}\left[1-u+u^2-u^3+o(u^3)\right]\\&=frac12\left[1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right)^2-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right)^3+o(x^3)\right]\\&=frac12\left[1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{4}-\frac{x^3}{8}+o(x^3)\right]=\frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{1}{48}x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

La courbe représentative de f admet donc au point $(0,f(0)=\frac{1}{2})$ une tangente d'équation $y=-\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$ De plus,

$$f(x)-\left(-\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{48}x^3+o(x^3)$$

— Lorsque $x>0$ (au voisinage de 0^+), cette différence ($\frac{1}{48}x^3+o(x^3)$) est positive, et donc la courbe représentative de f est au dessus de la tangente d'équation $y=-\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$.
— Lorsque $x>0$ (au voisinage de 0^-), cette différence ($\frac{1}{48}x^3+o(x^3)$) est négative, et donc la courbe représentative de f est au dessous de la tangente d'équation $y=-\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$. On dit que la courbe traverse donc sa tangente en $(0,f(0)=\frac{1}{2})$.

2. en 0 de $g(x)=\ln(x^2+2x+2)$
On simplifie g pour écrire son DL(0) à l'ordre 3 :

$$g(x)=\ln\left(x^2+2x+2\right)=\ln(2(1+\frac{x+x^2}{2}))=\ln(2)+\ln(1+\frac{x+x^2}{2})$$

Combinons le changement de variable $u = x + \frac{x^2}{2}$ et le DL(0) $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$, on obtient

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(2) + x + \frac{x^2}{2} - \frac{\left(x + \frac{x^2}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(x + \frac{x^2}{2}\right)^3}{3} + o(x^3) \\ &= \ln(2) + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

La courbe représentative de g admet donc au point $(0, g(0) = \ln(2))$ une tangente d'équation $y = x + \ln(2)$ De plus,

$$g(x) - (x + \ln(2)) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

— Lorsque $x > 0$ (au voisinage de 0^+), cette différence $(-\frac{x^3}{6} + o(x^3))$ est négative, et donc la courbe représentative de g est au dessous de la tangente d'équation $y = x + \ln(2)$
— Lorsque $x > 0$ (au voisinage de 0^-), cette différence $(-\frac{x^3}{6} + o(x^3))$ est positive, et donc la courbe représentative de g est au dessus de la tangente d'équation $y = x + \ln(2)$. On dit que la courbe traverse donc sa tangente en $(0, g(0) = \ln(2))$.

Exercice n°6 Faire un dessin de la courbe asymptotique et préciser la position de la courbe représentative de la fonction par rapport à la courbe asymptotique pour les fonctions suivantes :

1. en $\pm\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$

— en $+\infty$, on a

$$f(x) = \sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} + \sqrt{x^2(1 - \frac{1}{x^2})} = x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$

On pose $u = \frac{1}{x^2}$, ce qui nous donne u tend vers 0 et on applique le développement limité en 0 de la fonction $(1 \pm u)^\alpha$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) + x\left(1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) \\ &= 2x - \frac{1}{4x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \end{aligned}$$

— en $-\infty$, on a

$$f(x) = \sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} + \sqrt{x^2(1 - \frac{1}{x^2})} = -x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$

On pose $u = \frac{1}{x^2}$, ce qui nous donne u tend vers 0 et on applique le développement limité en 0 de la fonction $(1 \pm u)^\alpha$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x\left(1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) - x\left(1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) \\ &= -2x + \frac{1}{4x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \end{aligned}$$

Par un calcul simple, on trouve l'équation de la courbe asymptotique, $y = -2x$, en effet

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) - (-2x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{4x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) = 0$$

On en déduit que courbe représentative de f est dessous de la courbe asymptotique d'équation $y = -2x$ en $-\infty$ (car $\frac{1}{4x^3} < 0$ en $-\infty$.) Cependant, en $+\infty$, la courbe représentative de f est dessus de la courbe asymptotique d'équation $y = -2x$ (car $\frac{1}{4x^3} > 0$ en $+\infty$).

2. en $+\infty$ de $g(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$
On combine les étapes suivantes : simplifier l'écriture de g, poser $u = \frac{1}{x} \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$ ensuite utiliser le $DL_3(0)$ de $\ln(1+u)$:

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &= x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

On trouve finalement l'équation de la courbe asymptotique $y = x - \frac{1}{2}$ en calculant

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

On en déduit que courbe représentative de f est dessus de la courbe asymptotique d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ en $+\infty$ (car $\frac{1}{3x} > 0$ en $+\infty$.) Cependant, en $-\infty$, la courbe représentative de f est dessous de la courbe asymptotique d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ (car $\frac{1}{3x} < 0$ en $-\infty$).

3. En ∞ de $h(x) = \frac{1+x}{1+e^{1/x}}$
Pour $u = \frac{1}{x}$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, on a

$$e^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

En utilisant le $DL(0)_3$ de $\frac{1}{1+u}$, on arrive à

$$\begin{aligned} h(x) &= (1+x)\frac{1}{1+e^{1/x}} = (1+x)\frac{1}{1+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)} \\ &= (1+x)\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{12x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)} \\ &= \frac{1+x}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{12x^3}\right) + \left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{12x^3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{12x^3}\right)^3 + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right] \\ &= \frac{1+x}{2}\left[1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{12x^3} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4x^3} - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right] = \frac{1+x}{2}\left[1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{24x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right] \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{48x^2} + \frac{1}{48x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{48x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que la courbe représentative de h est au dessus de la courbe asymptotique d'équation $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ en $+\infty$ (car $\frac{1}{48x^3} > 0$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$). Cependant, la courbe représentative de h est au dessus de la courbe asymptotique d'équation $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ en $-\infty$ (car $\frac{1}{48x^3} < 0$ lorsque $x \longrightarrow -\infty$).

Exercice n°7 Déterminer le développement limité d'ordre 2 de $f(x,y) = e^x \ln(1+y)$ en $(0,0)$.
On utilise la définition de $DL(0,0)$ pour une fonction à deux variables :

$$f(x,y) = f(0,0) + x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) + o(x^2+y^2)$$

On calcule les dérivées partielles de f en (x,y)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= e^x \ln(1+y)\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{e^x}{1+y}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= e^x \ln(1+y)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= -\frac{e^x}{(1+y)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \ln(1+y)\right) = \frac{e^x}{1+y}
\end{aligned}$$

En évaluant ces dérivées en $(0,0)$ et en tenant compte de $f(0,0)=0$, on arrive à

$$f(x,y) = y - y^2 + 2xy + o(x^2+y^2)$$

Remarque : En général, le DL(a,b) d'une fonction à deux variables à l'ordre 2 est donné par

$$\begin{aligned}
f(x,y) = f(a,b) &+ (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + (x-a)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + (y-b)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\\
&+ 2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + o((x-a)^2+(y-b)^2)
\end{aligned}$$