Exercice 6 (PROBABILITÉ CONDITIONNELLES)

On considère trois boîtes numérotées de 1 à 3.

- *La boîte 1 contient 15 ampoules dont 6 défectueuses.*
- *La boîte 2 contient 8 ampoules dont 3 défectueuses.*
- *La boîte 3 contient 9 ampoules dont 2 défectueuses.*

On suppose qu'on a deux fois plus de chances de tirer la boîte 2 que les deux autres. On tire une boîte au hasard puis une ampoule dans la boîte. Quelle est la probabilité que l'ampoule extraite soit défectueuse ?

On peut prendre $\Omega = \{1, 2, 3\} \times \{c, d\}$ comme univers (c pour correcte et d pour défectueuse).
Soit les évènements A : "l'ampoule est défectueuse" et B_i : "la i-ème boîte a été choisie" ($i = 1, 2, 3$). (B_1, B_2, B_3) est un sytème complet d'évènements, donc on a

$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$ avec $\mathbb{P}(A|B_1) = 6/15 = 2/5$,
$\mathbb{P}(A|B_2) = 3/8$ et $\mathbb{P}(A|B_3) = 2/9$.

Par ailleurs, $\mathbb{P}(B_2) = 2\mathbb{P}(B_1) = 2\mathbb{P}(B_3)$ avec $\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(B_i) = 1$, soit $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_3) = 1/4$ et $\mathbb{P}(B_2) = 1/2$. Finalement,

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{1}{10} + \frac{3}{16} + \frac{1}{18} = \frac{23}{80} + \frac{1}{18} = \frac{247}{720}}.$$

Exercice 7 (PROBABILITÉ COMPOSÉES)

Une boîte contient trois boules rouges et sept blanches. On tire une boule et on remet dans la boîte une boule de l'autre couleur. Puis on tire une deuxième boule. En admettant que, lors de chacun des tirages, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées, calculer la probabilité pour que la seconde boule tirée soit rouge.

Appelons B_1 l'événement "tirer une boule blanche au premier tirage" et R_1 l'événement "tirer une boule rouge au premier tirage". En utilisant l'équiprobabilité des tirages, on obtient $\mathbb{P}(B_1) = \frac{7}{10}$ et $\mathbb{P}(R_1) = \frac{3}{10}$.
Soit R_2 l'événement "tirer une boule rouge au second tirage.
On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_2) &= \mathbb{P}(R_2 \cap (B_1 \cup R_1)) = \mathbb{P}((R_2 \cap B_1) \cup (R_2 \cap R_1)) \\ &= \mathbb{P}(R_2 \cap B_1) + \mathbb{P}(R_2 \cap R_1) \end{aligned}$$

puisque les événements R_1 et B_1 sont incompatibles. On a donc

$$\boxed{\mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}_{B_1}(R_2)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}_{R_1}(R_2)\mathbb{P}(R_1)}.$$

C'est la formule des probabilités totales ! ! !

Pour $\mathbb{P}_{B_1}(R_2)$: si une boule blanche a été tirée au premier tirage elle a été remplacée par une boule rouge et il y a donc 4 boules rouges dans l'urne et 6 boules blanches lors du second tirage. Finalement, $\mathbb{P}_{B_1}(R_2) = \frac{4}{10}$.
Par le même raisonnement, on obtient : $\mathbb{P}_{R_1}(R_2) = \frac{2}{10}$. On a donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(R_2) = \frac{4}{10} \times \frac{7}{10} + \frac{2}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{34}{100} = 0,34}.$$

Exercice 8

Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires, indiscernables au toucher. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.

1. *Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure dans le tirage ?*
2. *Sachant qu'au moins une boule noire figure dans le tirage, quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire ?*

On distingue les boules et on ordonne les tirages. Il y a $10 \times 9 \times 8$ tirages possibles. On calcule ensuite le nombre de tirages ne comprenant pas de boule noire. Il y en a $8 \times 7 \times 6$ donc, si E_1 est l'événement “au moins une boule noire figure dans le tirage, on a $\mathbb{P}(\overline{E_1}) = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{10 \times 9 \times 8} = \dfrac{7 \times 6}{10 \times 9} = \dfrac{14}{30}$ et donc $\boxed{\mathbb{P}(E_1) = \dfrac{7}{15}}$. Le dénombrement du nombre de tirages tels que la première boule soit noire est relativement simple. Il y a exactement $2 \times 8 \times 1 + 2 \times 1 \times 8 + 2 \times 8 \times 7 = 2 \times 8 \times 9$ tirages. Si E_2 est l'événement : “La première boule tirée est noire”, alors

$$\mathbb{P}(E_2) = \frac{2 \times 8 \times 9}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{5}.$$

On cherche $\mathbb{P}_{E_1}(E_2) = \dfrac{\mathbb{P}(E_1 \cap E_2)}{\mathbb{P}(E_1)} = \dfrac{\mathbb{P}(E_2)}{\mathbb{P}(E_1)}$, soit $\boxed{\mathbb{P}_{E_1}(E_2) = \dfrac{3}{8}}$ puisque $E_1 \subset E_2$.

Exercice 9 (PROBA TOTALE & BAYES)

Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

Soit A l'événement "le candidat donne la bonne réponse" et B l'événement "le candidat connait vraiment la réponse".

On a $\mathbb{P}(B) = p$ (donné par l'énoncé) et on cherche $\mathbb{P}_A(B)$ avec

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)}{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)}.$$

Or $\mathbb{P}_B(A) = 1$ et $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A) = \dfrac{1}{m}$. On a donc

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{p \times 1}{p \times 1 + (1-p) \times \frac{1}{m}} = \frac{mp}{mp + (1-p)}.$$

La probabilité cherchée est donc $\boxed{\dfrac{mp}{1+(m-1)p}}$.

Exercice 10

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut 1/2.
On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

1. Notons T l'événement : "le dé est pipé" et C l'événement "le lancer amène un 6". On cherche $\mathbb{P}_C(T)$.
On va calculer cette probabilité en utilisant la formule de Bayes.
En effet, $(T; \overline{T})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, avec $P(T) = 25/100 = 1/4$ et $\mathbb{P}(\overline{T}) = 1 - P(T) = 3/4$.
L'énoncé nous dit aussi que $\mathbb{P}_T(C) = 1/2$ et bien sûr $\mathbb{P}_{\overline{T}}(C) = 1/6$.
La formule de Bayes donne alors

$$\boxed{\mathbb{P}_C(T) = \frac{\mathbb{P}(T)\mathbb{P}_T(C)}{\mathbb{P}(T)\mathbb{P}_T(C) + \mathbb{P}(\overline{T})\mathbb{P}_{\overline{T}}(C)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6}} = \frac{1}{2}.}$$

2. Introduisons les événements C_k définis par “le k-ième lancer amène un 6” et $D = \bigcap_{k=1}^{n} C_k$. On cherche $\mathbb{P}_D(T)$ que l’on calcule toujours par la formule de Bayes. Il faut juste remarquer que maintenant, par indépendance des événements C_k,
$\mathbb{P}_T(D) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\mathbb{P}_{\overline{T}}(D) = \left(\frac{1}{6}\right)^n$. On trouve donc :

$$\mathbb{P}_D(T) = \frac{\mathbb{P}(T)\mathbb{P}_T(D)}{\mathbb{P}(T)\mathbb{P}_T(D) + \mathbb{P}()\overline{T})\mathbb{P}_{\overline{T}}(D)} = \frac{\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

soit $\boxed{p_n = \frac{1}{1 + 3^{-n+1}}}$. En particulier, (p_n) tend vers 1 lorsque n tend vers l’infini, ce qui est conforme à l’intuition : plus n est grand, plus le dé est très certainement pipé.

Exercice 11

Exercice 11. $(* * *)$
On étudie au cours du temps le fonctionnement d’un appareil obéissant aux règles suivantes :

- Si l’appareil fonctionne à la date $n-1$, ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité p d’être en panne à la date n ($p \in]0,1[$).
- Si l’appareil est en panne à la date $n-1$, ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité q d’être en panne à la date n ($q \in]0,1[$).

On note p_n la probabilité que l’appareil fonctionne à la date n. Établir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre p_n et p_{n-1}. En déduire p_n en fonction de p_0. Étudier la convergence de la suite $(p_n)_{n\geq 1}$.

Soit F_n l’évènement : "l’appareil fonctionne à la date n". On connaît :
- $\mathbb{P}(\overline{F_n}|F_{n-1}) = p$.
- $\mathbb{P}(\overline{F_n}|\overline{F_{n-1}}) = q$.

Par la formule des probabilités totales, il vient

$$\begin{aligned} p_n = \mathbb{P}(F_n) &= \mathbb{P}(F_n \cap F_{n-1}) + \mathbb{P}(F_n \cap \overline{F_{n-1}}) \\ &= \mathbb{P}(F_n|F_{n-1})\mathbb{P}(F_{n-1}) + \mathbb{P}(F_n|\overline{F_{n-1}})\mathbb{P}(\overline{F_{n-1}}) \end{aligned}$$

Or, $\mathbb{P}(F_n|F_{n-1}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{F_n}|F_{n-1}) = 1 - p$ et
$\mathbb{P}(F_n|\overline{F_{n-1}}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{F_n}|\overline{F_{n-1}}) = 1 - q$, donc

$$p_n = (1-p)p_{n-1} + (1-q)(1-p_{n-1}) = (q-p)p_{n-1} + 1 - q.$$

Soit r tel que $r = (q-p)r + 1 - q$ (c'est-à-dire $r = \frac{1-q}{1-q+p}$).
On a alors $p_n - r = (q-p)(p_{n-1} - r)$ et
$p_n - r = (q-p)^n(p_0 - r)$, soit

$$p_n = r + (q-p)^n(p_0 - r) = \frac{1-q}{1-q+p} + (q-p)^n \left(p_0 - \frac{1-q}{1-q+p}\right).$$

On a $p \in]0,1[$ et $q \in]0,1[$, donc $1-q \in]0,1[$ et $1-q+p \in]0,2[$ et $q-p \in]-1,1[$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(q-p)^n = 0$ et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1-q}{1-q+p}}.$$

Exercice 12

Une information de type vrai/faux est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, l'information reçue d'une personne est transmise telle quelle à la personne suivante. Avec une probabilité $1-p$, l'information reçue d'une personne est transmise de façon contraire à la personne suivante. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1. Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
2. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.
3. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Conclusion ?

1. On note I_n l'événement : "l'information après n transmissions est correcte". D'après la formule des probabilités totales, on sait que

$$\mathbb{P}(I_{n+1}) = \mathbb{P}(I_{n+1}|I_n)\mathbb{P}(I_n) + \mathbb{P}(I_{n+1}|\overline{I_n})\mathbb{P}(\overline{I_n}).$$

Mais, $\mathbb{P}(I_{n+1}|I_n) = p$ (l'information doit être transmise correctement) et $\mathbb{P}(I_{n+1}|\overline{I_n}) = 1-p$ (l'information doit être mal transmise). On en déduit que
$\boxed{p_{n+1} = p \times p_n + (1-p)\times(1-p_n) = (2p-1)p_n + (1-p)}$.
2. On a une suite arithmético-géométrique. Sa limite possible ℓ vérifie $\ell = (2p-1)\times \ell + (1-p)$, c'est-à-dire $\ell = \dfrac{1}{2}$.

On pose alors $u_n = p_n - \frac{1}{2}$ et on vérifie que (u_n) est géométrique de raison $(2p-1)$. En effet,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{2} = (2p-1)p_n + (1-p) - \frac{1}{2} = (2p-1)\left(p_n - \frac{1}{2}\right).$$

On en déduit $u_n = (2p-1)^n u_0$ avec $u_0 = p_0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. On conclut que $\boxed{p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n}$. On distingue alors 3 cas :

• Si $p = 1$, l'information est transmise presque sûrement correctement, et $p_n = 1$ pour tout entier n.
• Si $p = 0$, l'information est presque sûrement mal transmise, et $p_{2n} = 1$, $p_{2n+1} = 0$ pour tout entier n.
• Si $p \in]0,1[$, alors $|2p-1| < 1$ et donc (p_n) converge vers $1/2$. On n'a plus de traces de l'information initiale !

Exercice 13

Pour se rendre à son domicile, un automobiliste passe par la ville 3 fois sur 5. Dans ce cas, il est pris dans un embouteillage 1 fois sur 4 ; quand il contourne la ville, il est retardé par un contrôle de police 1 fois sur 10.

1. *Calculer la probabilité que l'automobiliste soit retardé.*
2. *Sachant qu'il est en retard, quelle est la probabilité qu'il soit passé par la ville ?*

1. Soit R l'événement "l'automobiliste est en retard" et V l'événement "l'automobiliste passe par la ville". L'énoncé donne $\mathbb{P}(V) = \frac{3}{5}$, $\mathbb{P}_V(R) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}_{\overline{V}}(R) = \frac{1}{10}$.
On a, d'après les probabilités totales,

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(V)\mathbb{P}_V(R) + P(\overline{V})\mathbb{P}_{\overline{V}}(R) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{20} + \frac{1}{25}.$$

La probabilité que l'automobiliste soit retardé est donc $\boxed{\mathbb{P}(R) = \frac{19}{100}}$.

2. On a $\mathbb{P}_R(V) = \dfrac{\mathbb{P}(V)\mathbb{P}_V(R)}{\mathbb{P}(R)} = \dfrac{3/20}{19/100}$, soit $\boxed{\mathbb{P}_R(V) = 15/19}$.

Exercice 14

Une usine d'ampoules dispose de 3 machines qui fabriquent respectivement 20, 30 et 50% de la production. Sachant que la probabilité qu'une ampoule défectueuse ait été fabriquée par A, B, C est :
$\mathbb{P}_A(D) = 0.05$; $\mathbb{P}_B(D) = 0.04$; $\mathbb{P}_C(D) = 0.01$, calculer la probabilité :

1. qu'une ampoule soit défectueuse ;
2. qu'une ampoule défectueuse provienne de A ;
3. qu'une ampoule non défectueuse provienne de C .

On note D l'événement "l'ampoule est défectueuse" et A (resp. B, C) "l'ampoule vient de A (resp. B, C).
1. On a, d'après les probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}_A(D)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_B(D)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_C(D)\mathbb{P}(C) \\ &= 0.05 \times 0.2 + 0.04 \times 0.3 + 0.01 \times 0.5 = 0.01 + 0.012 + 0.005\end{aligned}$$

et donc $\boxed{\mathbb{P}(D) = 0.027}$.

2. $\mathbb{P}_D(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap D)}{\mathbb{P}(D)}$, soit $\boxed{\mathbb{P}_D(A) = \dfrac{10}{27} \approx 0.37}$.

3. $\mathbb{P}_{\overline{D}}(C) = \dfrac{P(C \cap \overline{D})}{\mathbb{P}(\overline{D})} = \dfrac{\mathbb{P}_C(\overline{D}) \times \mathbb{P}(C)}{1 - \mathbb{P}(D)} = \dfrac{(1 - \mathbb{P}_C(D))\mathbb{P}(C)}{1 - \mathbb{P}(D)}$,

donc $\boxed{\mathbb{P}_{\overline{D}}(C) = \dfrac{0.09 \times 0.5}{0.973} = \dfrac{45}{973} \approx 0.51}$.

Exercice 15

Dans un élevage de moutons, la probabilité qu'un animal soit atteint par une maladie M est 0,3. La probabilité qu'un mouton qui n'est pas atteint par M ait une réaction négative à un test T est 0,9 ; la probabilité qu'un mouton atteint par M ait une réaction positive à T est 0,8.
Quelle est la probabilité qu'un mouton pris au hasard et ayant une réaction positive à T soit atteint par M ?

Soit M l'événement "un mouton est malade" et T l'événement "un mouton a une réaction positive au test. On connait :

- $\mathbb{P}(M) = 0.3$
- $\mathbb{P}_M(T) = 0.8$
- $\mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0.9$ et on cherche $\mathbb{P}_T(M)$.

On va utiliser la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_T(M) = \frac{\mathbb{P}_M(T)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}_M(T)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}_{\overline{M}}(T)\mathbb{P}(\overline{M})}$$

et on sait que $P_{\overline{M}}(T) = 1 - \mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{T}) = 1 - 0.9 = 0.1$ (car $\mathbb{P}_{\overline{M}}$ est une probabilité), donc

$$\mathbb{P}_T(M) = \frac{0.8 \times 0.3}{0.8 \times 0.3 + 0.1 \times 0.7}$$

soit $\boxed{\mathbb{P}_T(M) = \dfrac{24}{31}}$.

Exercice 16

On estime que dans une population il y a 30% de personnes qui ne sont pas immunisées contre une certaine maladie. Un test pratiqué sur des personnes non immunisées réagit négativement dans 80% des cas, et pratiqué sur des personnes immunisées réagit positivement dans 70% des cas. En choisissant au hasard une personne dans la population, quelle est la probabilité qu'elle soit immunisée, sachant qu'elle réagit positivement au test ?

Soit A l'événement "tirer au hasard une personne immunisée" et B l'événement "tirer au hasard une personne réagissant positivement au test". On a : $\mathbb{P}(A) = 0,7$, $\mathbb{P}_A(B) = 0,7$, $\mathbb{P}_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0,8$. On cherche $\mathbb{P}_B(A)$; on utilise la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)\mathbb{P}(\overline{A})} = \frac{0,7 \times 0,7}{0,7 \times 0,7 + 0,2 \times 0,3}$$

Soit finalement $\boxed{\mathbb{P}_B(A) = \frac{49}{55} \simeq 0,89}$.

Exercice 17 (EVEN INDEPENDANT)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. *Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 1/4$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 1/3$. Calculer $\mathbb{P}(B)$ dans les cas suivants :*
   a. A et B sont incompatibles ;
   b. A et B sont indépendants ;
   c. $A \subset B$.
2. *Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 3/4$. Déterminer les valeurs minimale et maximale de $\mathbb{P}(A \cap B)$.*

1. On a :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{12} + \mathbb{P}(A \cap B).$$

a. Si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$, alors $\boxed{\mathbb{P}(B) = \frac{1}{12}}$.

b. Si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, alors $\boxed{\mathbb{P}(B) = \frac{1}{12(1 - \mathbb{P}(A))} = \frac{1}{9}}$.

c. Si $A \subset B$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$, d'où $\boxed{\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}}$.

2. Puisque $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)) = \frac{3}{4}$,

$\boxed{\text{la valeur maximale de } \mathbb{P}(A \cap B) \text{ est } \frac{3}{4}}$.

Par ailleurs,
$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{2} - \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant 1$. On en déduit que :

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

$\boxed{\text{La valeur minimale de } \mathbb{P}(A \cap B) \text{ est } \frac{1}{2}}$.

Exercice 18

Trois chasseurs visent un lièvre. Le premier touche le lièvre avec une probabilité de $3/4$, le deuxième avec une probabilité de $1/10$ et le troisième avec une probabilité de $1/2$. Les tirs sont mutuellement indépendants.

1. *Quelle est la probabilité que les trois tireurs touchent le lièvre ?*
2. *Quelle est la probabilité qu'au moins un tireur touche le lièvre ?*

On note T_i l'événement “le lièvre est touché par le chasseur i”.

1. Soit E_1 l'événement “les trois tireurs touchent le lièvre ”. On a alors, comme les tirs sont indépendants :

$$\boxed{\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(T_1)\mathbb{P}(T_2)\mathbb{P}(T_3) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{80}}.$$

Soit E_2 l'événement “moins un chasseur touche le lièvre”. On a alors $\overline{E_2}$:“aucun chasseur touche le lièvre” et donc

$$\mathbb{P}(\overline{E_2}) = \mathbb{P}(\overline{T_1})\mathbb{P}(\overline{T_2})\mathbb{P}(\overline{T_3}) = \frac{1}{4} \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{80}$$

et donc $\boxed{\mathbb{P}(E_2) = 1 - \frac{9}{80} = \frac{71}{80}}$.

Exercice 19

Le problème du chevalier de Méré.

1. On jette un dé n fois de suite.
   1.1. Calculer la probabilité p_n d'obtenir au moins une fois le 6.
   1.2. Calculer p_4.
   1.3. Calculer la probabilité q_n d'obtenir au moins deux fois le 6.
2. On jette maintenant deux dés n fois.
   2.1. Calculer la probabilité p'_n d'obtenir au moins une fois le double 6.
   2.2. Calculer p'_{24} et comparer cette valeur avec p_4.

1.1. Soit A l'événement "obtenir au moins une fois le 6 en n lancers". L'événement $\overline{A}$ est "ne jamais obtenir le 6 en n lancers". Si on suppose les lancers indépendants, on a $\mathbb{P}(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$. D'où :

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.}$$

1.2. $\boxed{p_4 \simeq 0,52}$.

1.3. Soit B l'événement "obtenir au moins deux fois le 6 en n lancers". Soit C l'événement "obtenir exactement une fois le 6". On a : $\overline{B} = \overline{A} \cup C$, c'est-à-dire le complémentaire de B est l'événement "ne jamais obtenir le 6 ou obtenir exactement une fois le 6".

On a $\mathbb{P}(C) = n\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$: cette probabilité s'obtient comme la probabilité d'obtenir un 6 et $n-1$ autres numéros, on doit ensuite multiplier par les n possibilités de position du 6.

Il vient finalement :

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n - n\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}.$$

2.1. Soit A' l'événement obtenir au moins une fois le double 6", $\overline{A'}$ est l'événement "ne jamais obtenir un double 6". Le nombre de résultats possibles est ici $(6^2)^n = 36^n$ et les résultats sont équiprobables. Pour chaque lancer, il y a 35 possibilités si on élimine le double 6. Donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n}.$$

2.2. $\boxed{p'_{24} \simeq 0,49}$: on voit que dans le premier cas, le jeu est favorable en ce sens qu'on a plus d'une chance sur 2 d'obtenir au moins un 6 en 4 lancers. Dans le second le jeu est défavorable : la probabilité d'au moins un double 6 en 24 lancers est inférieure à 1/2.

Exercice 20. $(***)$
On dispose de 3 composants électriques C_1, C_2 et C_3 dont les probabilités de fonctionnement sont p_1, p_2, p_3, et de fonctionnements totalement indépendants les uns des autres. Donner la probabilité de fonctionnement du circuit

1. si les composants sont disposés en série ;
2. si les composants sont disposés en parallèle ;
3. si le circuit est mixte : C_1 disposé en série avec le sous-circuit constitué de C_2 et C_3 en parallèle.

On pourra utiliser la formule établie au Chapitre 1 :

$$\mathbb{P}(A\cup B\cup C)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C).$$

---

1. On note F_i l'événement : "le composant C_i fonctionne". Par hypothèse, les événements F_i sont mutuellement indépendants. Il faut calculer pour le premier cas $\mathbb{P}(F_1\cap F_2\cap F_3)$ car le circuit formé par les trois composants disposés en série fonctionne si et seulement si les trois composants fonctionnent et, par indépendance des événements, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}(F_1\cap F_2\cap F_3)=\mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2)\mathbb{P}(F_3)=p_1p_2p_3}.$$

2. Pour le second circuit, il faut calculer $\mathbb{P}(F_1\cup F_2\cup F_3)$ car le circuit formé par les trois composants disposés en parallèle fonctionne si et seulement si un des trois composants au moins fonctionne, et on a alors, d'après la formule rappelée dans l'énoncé, et par indépendance des événements :

$$\boxed{\mathbb{P}(F_1\cup F_2\cup F_3)=p_1+p_2+p_3-p_1p_2-p_1p_3-p_2p_3+p_1p_2p_3}.$$

3. Pour le troisième circuit, on doit calculer $\mathbb{P}(F_1\cap(F_2\cup F_3))$. L'événement $F_2\cup F_3$ est indépendant de F_1. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_1\cap(F_2\cup F_3)) &= \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2\cup F_3)\\ &= \mathbb{P}(F_1)\left(\mathbb{P}(F_2)+\mathbb{P}(F_3)-\mathbb{P}(F_2\cap F_3)\right)\end{aligned}$$

soit $\boxed{\mathbb{P}(F_1\cap(F_2\cup F_3))=p_1(p_2+p_3-p_2p_3)}$.

Exercice 21

On considère les différentes répartitions possibles des sexes des enfants d'une famille ayant n enfants. Soit A l'événement : "la famille a au plus une fille" et B : "la famille a des enfants des deux sexes". Montrer que les événements A et B sont indépendants uniquement dans le cas $n = 3$.

Cas n = 3 : Ici l'ordre compte donc les issues sont des triplets et

Il y en a $\mathrm{card}(\Omega) = 2^3 = 8$

$A = \{(G, G, G), (G, G, F), (F, G, G), (G, F, G)\}$

$B = \{(G, G, F), (G, F, F), (F, G, F), (F, G, G), (F, F, G), (G, F, G)\}.$

d'où $A \cap B = \{(G, G, F), (F, G, G), (G, F, G)\}$. Ainsi

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \ \mathbb{P}(B) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{8},$$

et $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$:

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants dans le cas } n = 3}.$$

Cas général : Ici l'ordre compte donc les issues sont des n-uplets. Puis on a

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(0 \text{ fille ou } 1 \text{ fille}) = \frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^n},$$

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\text{avoir que des filles ou que des garçons})$$

$$= 1 - \frac{2}{2^n},$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{n+1}{2^n}\left(1 - \frac{2}{2^n}\right) = \frac{(2^n - 2)(n+1)}{2^{2n}}}$$

et $\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(1 \text{ fille}) = \frac{n}{2^n}}$ avec égalité uniquement pour $\boxed{n = 3}$ car $n2^n - (n+1)(2^n - 2) = 2(n+1) - 2^n$ ne s'annule que pour $n = 3$ (> 0 pour $n = 2$ et < 0 pour $n \geq 4$).

Exercice 22. ($* * *$)

Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4. Il est relu par une suite de relecteurs pour correction. À chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité $1/3$. Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigée à l'issue de la n-ième lecture ?
2. Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la n-ième lecture ? Combien faut-il de relectures pour que cette probabilité soit supérieure à 0.9 ?

1. Notons A_i l'événement "l'erreur numéro 1 n'est pas corrigée par le i-ème relecteur". Alors on a $\mathbb{P}(A_i) = 2/3$ et les événements A_i sont indépendants. On s'intéresse à la probabilité de l'événement $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ qui vaut donc

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{2}{3} = \frac{2^n}{3^n}}.$$

2. Notons B_j l'événement :"l'erreur numéro j n'est pas corrigée

à l'issue de la n-ième relecture". D'après la question précédente, on a $P(B_j) = 2^n/3^n$ pour $j = 1, \cdots, 4$. Le livre est entièrement corrigé après la n-ième relecture si l'événement $\bigcap_{j=1}^{4} \overline{B_j}$ est réalisé.

Les événements B_j étant indépendants, le livre est entièrement corrigé après n relectures avec une probabilité valant

$$\boxed{\prod_{j=1}^{4}\left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right) = \left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right)^4}.$$

Cette probabilité est supérieure à 0.9 si et seulement si $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 1 - 0.9^{1/4}$, et, avec la croissance de ln,

$$n \ln(2/3) \leq \ln(1 - 0.9^{1/4}),$$

soit

$$n \geq \frac{\ln(1 - 0.9^{1/4})}{\ln(2/3)}$$

et donc ceci fonctionne dès que $\boxed{n \geq 10}$.