Variables aléatoires finies

Exercice 1. $(*)$
Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs 3, 4, 5 et 6.
Déterminer la loi de probabilité de X sachant que :

$$\mathbb{P}(X < 5) = 1/3\,; \mathbb{P}(X > 5) = 1/2\,; \mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 4).$$

Corrigé :
En utilisant la somme des probabilités vaut 1 : $\sum_{k=3}^{6} \mathbb{P}(X = k) = 1$ sachant que $\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 4) = a$, $\mathbb{P}(X = 5) = b$, $\mathbb{P}(X = 6) = c$. On a donc $2a + b + c = 1$, $c = \frac{1}{2}$ et $2a = \frac{1}{3}$. Par conséquent

$$\boxed{a = \frac{1}{6},\ c = \frac{1}{2} \text{ et } b = 1 - 2a - b = \frac{1}{6}}.$$

Exercice 2. $(*)$
Soit X une variable aléatoire à valeurs entières, montrer que

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k - 1) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k + 1).$$

Corrigé :
Il suffit d'écrire que $[X \leqslant k] = [X = k] \cup [X \leqslant k - 1]$ et que $[X \geqslant k] = [X = k] \cup [X \geqslant k + 1]$ (réunion d'événements incompatibles)

Exercice 3. $(**)$
Un sac contient six jetons : deux jetons portent le numéro 1 ; trois portent le numéro 2 ; un jeton porte le numéro 3. On suppose que les jetons ont même probabilité d'apparition.
On tire simultanément trois jetons du sac.
Soit X la variable aléatoire associée à la somme des nombres portés par les jetons tirés.
Déterminer la loi de X.

Corrigé :
L'univers Ω associé à cette épreuve est l'ensemble des parties à trois éléments (jetons) parmi les six que contient le sac. D'où $(\Omega) = C_6^3 = \binom{6}{3} = 20$. Les éventualités sont les suivantes :

$$\{1, 1, 2\}, \{1, 2, 2\}, \{1, 1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 2, 2\}, \{2, 2, 3\}.$$

Donc X prend les valeurs : 4, 5, 6, 7, c'est-à-dire $X(\Omega) = \{4, 5, 6, 7\}$ avec

$$\mathbb{P}_X(4) = \mathbb{P}(X = 4) = \frac{C_2^2 C_3^1}{20} = \frac{3}{20}$$
$$\mathbb{P}_X(5) = \mathbb{P}(X = 5) = \frac{C_2^1 C_3^2 + C_2^2 C_1^1}{20} = \frac{7}{20}$$
$$\mathbb{P}_X(6) = \mathbb{P}(X = 6) = \frac{C_2^1 C_3^1 C_1^1 + C_3^3}{20} = \frac{7}{20}$$
$$\mathbb{P}_X(7) = \mathbb{P}(X = 7) = \frac{C_3^2 C_1^1}{20} = \frac{3}{20}.$$

On vérifie que la somme de ces 4 probabilités donne bien 1.

Exercice 4. $(**)$
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On en tire 2 au hasard sans remise. Soit X la variable aléatoire égale au plus grand numéro tiré.
Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ et en déduire la loi de X.

Corrigé :
$X(\Omega) = [\![2, n]\!]$.

$\{X \leq k\}$ signifie que les 2 numéros tirés sont inférieurs ou égaux à k. Ainsi, $\mathbb{P}(X \leq k) = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$ et

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1).$$

Ainsi, $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X \leq 2) = \frac{2}{n(n-1)}$ et, pour $k \geq 3$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \frac{k(k-1)}{n(n-1)} - \frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)} \\ &= \frac{(k-1)(k-k+2)}{n(n-1)} = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}\end{aligned}$$

(valable aussi pour $k = 2$). On a donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X = k) = \frac{2(k-1)}{n(n-1)} \text{ pour tout } k \in [\![2, n]\!]}.$$

Exercice 5. $(***)$
Une urne contient 5 boules toutes distinctes. On tire 3 boules une à une avec remise. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules différentes tirées.
Déterminer la loi de X.

Corrigé :
$\text{card}\Omega = 5^3$ et $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.

Pour avoir $[X = 1]$, il faut tirer 3 fois la même boule et on a 5 choix possibles. Ainsi, $\boxed{\mathbb{P}(X = 1) = \frac{5}{5^3} = \frac{1}{25} = 0,04}$.

Pour avoir $[X = 3]$, pour la première boule, on a 5 choix, pour la deuxième 4 et pour la troisième 3. Ainsi, $\boxed{\mathbb{P}(X = 3) = \frac{5 \times 4 \times 3}{5^3} = \frac{12}{25} = 0,48}$.

Pour avoir $[X = 2]$, il faut 2 boules distinctes (5×4 choix), la boule différente des autres pouvant être en premier, en deuxième ou en troisième. Ainsi, $\boxed{\mathbb{P}(X = 2) = \frac{5 \times 4 \times 3}{5^3} = \frac{12}{25}}$.

Remarque : On a bien $\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) = 1$.

Exercice 6. $(***)$
Trois urnes A, B et C contiennent respectivement 1 boule blanche et 3 noires, 2 blanches et 2 noires, 3 blanches et 1 noire. On tire au hasard une boule dans chacune des 3 urnes, et on désigne par X le nombre de boules blanches obtenues.
Donner la loi de X.

Corrigé :
Dans chaque urne, il y a des boules blanches et des boules noires, donc, si on tire une boule dans chaque urne et que X désigne le nombre de boules blanches tirées, on a $X(\Omega) = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$.

— $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4}$, soit
$$\boxed{\mathbb{P}(X = 0) = \frac{3}{32}}.$$
— $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(B_1 \cap N_2 \cap N_3) + \mathbb{P}(N_1 \cap B_2 \cap N_3) + \mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap B_3) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{4}$, soit
$$\boxed{\mathbb{P}(X = 1) = \frac{13}{32}};$$
— $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap N_3) + \mathbb{P}(B_1 \cap N_2 \cap B_3) + \mathbb{P}(N_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{4}$, soit
$$\boxed{\mathbb{P}(X = 2) = \frac{13}{32}};$$
— $\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{4}$, soit
$$\boxed{\mathbb{P}(X = 3) = \frac{3}{32}}.$$

Exercice 7. $(*)$
Dans une urne se trouvent six boules. Trois sont numérotées 1, deux sont numérotées 2 et la dernière est numérotée 3. On effectue des tirages successifs sans remise de toutes les boules de l'urne. Déterminer la loi de chacune des variables aléatoires suivantes :

1. X_1 est le nombre de boules numérotées 1 présentes dans l'urne à l'issue du troisième tirage.
2. X_2 est le nombre de tirages nécessaires avant de ne plus avoir de boules numérotées 1 dans l'urne.

Corrigé :

1. Pour cette exercice, nous nous intéressons qu'au nombre des boules, donc l'ordre n'est pas important. Par conséquent,
$$card(\Omega) = C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20. \tag{1}$$
On note X_1 la variable aléatoire associée au nombre de boules numérotés 1 présentes dans l'urne à l'issue du troisième tirage. On en déduit donc que X_1 prenne les valeurs suivantes : $X_1(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$
— $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathbb{P}(3 \text{ boules numérotées 1 ont été tirées}) = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20}$
— $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(2 \text{ boules numérotées 1 ont été tirées}) = \frac{C_3^2 C_2^1 + C_3^2 C_1^1}{C_6^3} = \frac{9}{20}$
— $\mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}(1 \text{ boule numérotée 1 a été tirée}) = \frac{C_3^1 C_2^2 + C_3^1 C_2^1 C_1^1}{C_6^3} = \frac{9}{20} = P(X_1 = 1)$
— $\mathbb{P}(X_1 = 3) = \mathbb{P}(\text{aucune boule numérotée 1 tirée}) = \frac{C_2^2 C_1^1}{C_6^3} = \frac{1}{20} = \mathbb{P}(X_1 = 0)$
2. On a $\mathrm{card}(\Omega) = 60$. Ici, il faudra au minimum 3 tirages pour ne plus avoir de boules 1, et au maximum 6 (si la dernière boule tirée est une boule 1).

   On a donc $X_2(\Omega) = \{3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$. $X_2 = 3$ correspond aux 3 boules 1 tirées en premier, c'est-à-dire à $X_1 = 3$ donc 3 possibilités et $\boxed{\mathbb{P}(X_2 = 3) = 1/20}$.

Pour $X_2 = 4$, il faut tirer la dernière boule 1 en quatrième position, donc 2 boules 1 dans les 3 premières, ce qui fait $\binom{3}{2} = 3$ choix, puis toujours 3 places possibles pour la boule 3, donc au final 9 choix, donc $\boxed{\mathbb{P}(X_2 = 4) = 9/60 = 3/20}$.

Pour $X_2 = 5$, il faut tirer la dernière boule 1 en cinquième position, donc 2 boules 1 dans les 4 premières, ce qui fait $\binom{4}{2} = 6$ choix, puis toujours 3 places possibles pour la boule 3, donc au final 18 choix, donc $\boxed{\mathbb{P}(X_2 = 5) = 18/60 = 6/20}$.

On en déduit finalement $\mathbb{P}(X_2 = 6) = 1 - \mathbb{P}(X_2 = 3) - \mathbb{P}(X_2 = 4) - \mathbb{P}(X_2 = 5)$.

Exercice 8. $(**)$

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On en tire n en effectuant des tirages avec remise.
On note X et Y le plus petit et le plus grand des nombres obtenus.
Déterminer la loi de X et la loi de Y.

Corrigé :

Il n'est pas facile de calculer directement $\mathbb{P}(X = k)$ et il est beaucoup plus facile de calculer $\mathbb{P}(X \geqslant k)$. En effet, on a $[X \geqslant k]$ si et seulement si tous les tirages ont amené un nombre supérieur ou égal à k.

La probabilité qu'un tirage amène un nombre supérieur ou égal à k valant $(N - k + 1)/N$ et les tirages étant indépendants, on a

$$\mathbb{P}(X \geqslant k) = \frac{(N-k+1)^n}{N^n}.$$

On déduit $\mathbb{P}(X = k)$ par la formule

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geqslant k) - \mathbb{P}(X \geqslant k + 1)$$

soit $\boxed{\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{(N-k+1)^n - (N-k)^n}{N^n}}$.

La démarche est similaire pour Y, mais cette fois on calcule $\mathbb{P}(Y \leqslant k)$ qui vaut

$$\mathbb{P}(Y \leqslant k) = \frac{k^n}{N^n}.$$

Il vient alors

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y \leqslant k) - \mathbb{P}(Y \leqslant k - 1)$$

soit $\boxed{\mathbb{P}(Y = k) = \dfrac{k^n - (k-1)^n}{N^n}}$.

Exercice 9. $(**)$

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. Déterminer la loi de la variable aléatoire X dans les cas suivants :

1. On tire simultanément k boules au hasard ; X est le plus petit numéro obtenu.
2. On tire successivement 3 boules, sans remise ; X est le numéro de la 3-ième boule tirée.
3. On tire simultanément 3 boules au hasard ; X est le numéro intermédiaire.

Corrigé :

1. $\mathrm{card}(\Omega) = C_n^k$, $X(\Omega) = [\![1, n - k + 1]\!]$ et $\boxed{\mathbb{P}(X = i) = \dfrac{C_{n-i}^{k-1}}{C_n^k}}$ (on choisit les $k - 1$ boules restantes à tirer parmi les $n - i$ plus grandes que i).

2. $\text{card}\Omega = A_n^3 = n(n-1)(n-2)$, $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$
et $\boxed{\mathbb{P}(X = i) = \dfrac{1}{n}}$ $(= \dfrac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)(n-2)})$.

3. $\text{card}(\Omega) = C_n^3 = \binom{n}{3}$, $X(\Omega) = [\![2, n-1]\!]$

et $\boxed{\mathbb{P}(X = i) = \dfrac{(i-1)(n-i)}{C_n^3}}$ (1 boule avant, 1 boule après).

Exercice 10. $(**)$
On lance simultanément deux dés.
On note X la variable aléatoire égale au carré de la différence des points obtenus : si on obtient i et j, $X = (i-j)^2$.
Déterminer la loi de probabilité de X.

Corrigé :
L'ensemble des résultats est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$.
On considère $\mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ l'équiprobabilité sur Ω.
Pour déterminer les valeurs de X, on s'aide du tableau suivant :

$i \| j$	1	2	3	4	5	6
1	0	1	4	9	16	25
2	1	0	1	4	9	16
3	4	1	0	1	4	9
4	9	4	1	0	1	4
5	16	9	4	1	0	1
6	25	16	9	4	1	0

On a $X(\Omega) = \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$.

On a donc par exemple

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}) = \frac{6}{36},$$

$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{10}{36}, \cdots$
On ne reconnaît pas un schéma du cours, donc on doit calculer les probabilités que X soit égal à chacune des issues possibles pour déterminer sa loi. La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau suivant :

k	0	1	4	9	16	25	total
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	1

Exercice 11. $(***)$
On lance un dé successivement deux fois, on note X le premier résultat moins le deuxième.
Déterminer la loi de X, de $|X|$ et de X^2.

Corrigé :

On a $X(\Omega) = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ avec

$\mathbb{P}(X=-5) = \mathbb{P}((1,6)) = \dfrac{1}{36}$, $\quad\mathbb{P}(X=-4) = \mathbb{P}((2,6),(1,5)) = \dfrac{2}{36}$,

$\mathbb{P}(X=-3) = \mathbb{P}((3,6),(2,5),(1,4)) = \dfrac{3}{36}$, $\quad\mathbb{P}(X=-2) = \mathbb{P}((4,6),(3,5),(2,4),(1,3)) = \dfrac{4}{36}$

$\mathbb{P}(X=-1) = \mathbb{P}((5,6),(4,5),(3,4),(2,3),(1,2)) = \dfrac{5}{36}$, $\quad\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}((6,6),(5,5),(4,4),(3,3),(2,2),(1,1)) = \dfrac{6}{36}$

$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}((6,5),(5,4),(4,3),(3,2),(2,1)) = \dfrac{5}{36}$, $\quad\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}((6,4),(5,3),(4,2),(3,1)) = \dfrac{4}{36}$

$\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}((6,3),(5,2),(4,1)) = \dfrac{3}{36}$, $\quad\mathbb{P}(X=4) = \mathbb{P}((6,2),(5,1)) = \dfrac{2}{36}$

$\mathbb{P}(X=5) = \mathbb{P}((6,1)) = \dfrac{1}{36}$.

- Si $Y = |X|$, $Y(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ avec

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X=0) = \frac{6}{36}, \qquad \mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=-1) = \frac{10}{36}\\
&\mathbb{P}(Y=2) = \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=-2) = \frac{8}{36}\\
&\mathbb{P}(Y=3) = \mathbb{P}(X=3) + \mathbb{P}(X=-3) = \frac{6}{36}\\
&\mathbb{P}(Y=4) = \mathbb{P}(X=4) + \mathbb{P}(X=-4) = \frac{4}{36}\\
&\mathbb{P}(Y=5) = \mathbb{P}(X=5) + \mathbb{P}(X=-5) = \frac{2}{36}
\end{aligned}$$

- Si $Z = X^2 = |X|^2$, $Z(\Omega) = \{0; 1; 4; 9; 16; 25\}$, avec

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Z=0) = \frac{6}{36}, \qquad \mathbb{P}(Z=1) = \frac{10}{36}, \qquad \mathbb{P}(Z=4) = \frac{8}{36}\\
&\mathbb{P}(Z=9) = \frac{6}{36}, \qquad \mathbb{P}(Z=16) = \frac{4}{36}, \qquad \mathbb{P}(Z=25) = \frac{2}{36}
\end{aligned}$$

Exercice 12. $(***)$

Pour votre voyage Toulouse-Londres, vous avez le choix entre deux avions : un bimoteur (avion à deux réacteurs) et un quadrimoteur (avion à quatre réacteurs). Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres et chaque moteur a une même probabilité $p \in [0, 1]$ de tomber en panne sur le trajet. Un avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne.
Quel avion choisissez-vous ? On discutera en fonction de la valeur de p.

Corrigé :

On modélise le nombre de moteurs tombant en panne sur le prochain vol du bimoteur (resp. du quadrimoteur) par $X_2 \sim \mathcal{B}(2, p)$ (resp. $X_4 \sim \mathcal{B}(4, p)$). On a :

$$\mathbb{P}(X_4 < 2) = \mathbb{P}(X_4 = 0) + \mathbb{P}(X_4 = 1) = (1-p)^4 + 4p(1-p)^3$$

et $\mathbb{P}(X_2 < 1) = \mathbb{P}(X_2 = 0) = (1-p)^2$ donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_4 < 2) - \mathbb{P}(X_2 < 1) &= (1-p)^2\left((1-p)^2 + 4p(1-p) - 1\right)\\
&= (1-p)^2(1 - 2p + p^2 + 4p - 4p^2 - 1)
\end{aligned}$$

soit $\boxed{\mathbb{P}(X_4 < 2) - \mathbb{P}(X_2 < 1) = p(1-p)^2(2-3p)}$.

Donc on a intérêt à prendre le quadrimoteur si et seulement si $\mathbb{P}(X_4 < 2) - \mathbb{P}(X_2 < 1) \geqslant 0$, c'est-à-dire
$\boxed{p \leqslant 2/3}$.

Ceci est à espérer : pour $p > 2/3$,

$$\mathbb{P}(X_4 < 2) < \mathbb{P}(X_2 < 1) = (1-p)^2 < 1/9\,!$$

Exercice 13. $(* * *)$
Un étang contient des brochets et des truites. On note p la proportion de truites dans l'étang. On souhaite évaluer p. On prélève 20 poissons au hasard. On suppose que le nombre de poissons est suffisamment grand pour que ce prélèvement s'apparente à 20 tirages indépendants avec remise. On note X le nombre de truites obtenues.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Le prélèvement a donné 8 truites. Pour quelle valeur de p, la quantité $\mathbb{P}(X = 8)$ est-elle maximale ?

Corrigé : 1. On reconnaît le principe d'un schéma de Bernoulli, avec 20 épreuves indépendantes et une probabilité p de succès.

$$\boxed{X \text{ suit donc une loi binomiale } \mathrm{Bin}(20, p).}$$

2. On a $\mathbb{P}(X = 8) = C_{20}^8 p^8(1-p)^{12}$. On va étudier cette fonction de p de sorte de trouver son maximum.
Il suffit d'étudier, sur $[0, 1]$, la fonction $g(p) = p^8(1-p)^{12}$ puisque C_{20}^8 ne dépend pas de p. g est dérivable et sa dérivée est

$$\begin{aligned} g'(p) &= 8p^7(1-p)^{12} - 12p^8(1-p)^{11} \\ &= (8(1-p) - 12p)p^7(1-p)^{11} \\ &= (8 - 20p)p^7(1-p)^{11}. \end{aligned}$$

On en déduit que $g'(p) \geqslant 0$ sur $[0, 2/5]$ et $g'(p) \leqslant 0$ sur $[2/5, 1]$.

$$\boxed{\text{La probabilité } \mathbb{P}(X = 8) \text{ est maximale pour } p = 2/5}.$$