Variables aléatoires discrètes infinies

Exercice 1. $(*)$ Dans une verrerie, on fabrique des objets en verre qui admettent en moyenne 3 défauts. La probabilité du nombre de défauts par objet est déterminée par une loi de Poisson. Calculer la probabilité pour qu'un objet :

a) ne contienne aucun défaut ;

b) contienne 2 défauts au plus.

Corrigé :

D'après l'énoncé, X suit la loi de Poisson et a pour moyenne 3. Comme, pour la loi de Poisson, la moyenne est égale au paramètre, X suit la loi $\mathcal{P}(3)$.

a) $\mathbb{P}(X = 0) = e^{-3} \approx 0,05$.

b) $\mathbb{P}(X \leqslant 2) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)$, soit

$$\mathbb{P}(X \leqslant 2) = e^{-3}\left(1 + 3 + \frac{9}{2}\right) = \frac{17}{2}\,e^{-3} \approx 0,42.$$

Exercice 2. $(*)$ Sachant que le nombre moyen de communications téléphoniques reçues par un standard entre 10h et 11h est de 1,8 par minute, et que le nombre X d'appels reçus par minute est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson, calculer la probabilité pour qu'entre 10h53 et 10h54 il y ait aucun appel ; 1 appel ; 2 appels ; au moins 2 appels ; plus de 2 appels ; 2, 3 ou 4 appels.

Corrigé :

X suit la loi $\mathcal{P}(1,8)$. $\mathbb{P}(X = 0) = e^{-1,8} \approx 0,165$, $\mathbb{P}(X = 1) = 1,8e^{-1,8} \approx 0,298$, $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1,8^2}{2}\,e^{-1,8} \approx 0,268$.

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) \approx 0,537.$$
$$\mathbb{P}(X > 2) = \mathbb{P}(X \geqslant 2) - \mathbb{P}(X = 2) \approx 0,269$$
$$\mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(X = 2)\left(1 + \frac{1,8}{3} + \frac{1,8^2}{12}\right) \approx 0,501.$$

Exercice 3. $(*)$ Le nombre de paquets d'une marque de biscuits vendus quotidiennement dans un magasin est une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ modélisant la production et qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. De plus, on a $\mathbb{P}(X = 5) = \mathbb{P}(X = 6)$.

a) Déterminer λ.

b) Le prix d'un paquet est deux euros. Soit Y la variable retournant le nombre d'euros que rapporte la vente journalière des paquets de biscuits. Exprimer Y en fonction de X et calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

Corrigé :

a) On a donc $\frac{\lambda^5}{5!} = \frac{\lambda^6}{6!} = \frac{\lambda}{6}\frac{\lambda^5}{5!}$ (les $e^{-\lambda}$ se simplifient). Donc, $\boxed{\lambda = 6}$.

b) On a donc $Y = 2X$, ce qui fait que $\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{E}(X) = 2\lambda$, donc $\boxed{\mathbb{E}(Y) = 12}$ et $\mathrm{Var}(Y) = 2^2\mathrm{Var}(X)$, soit $\boxed{\mathrm{Var}(Y) = 24}$.

Exercice 4. $(*)$ On considère une variable aléatoire entière Y dont la loi de probabilités est définie, pour tout $m \in \mathbb{N}$, par $P(Y = m) = \frac{2}{3^{m+1}}$. Déterminer l'espérance et la variance de Y.

Corrigé : On a donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = m) = \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^m$. On reconnaît ainsi la loi géométrique sur $\mathbb{N}$, et Y suit la loi $\mathcal{G}_0\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

D'après le résultat vu en cours, $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathrm{Var}(Y) = \dfrac{3}{4}$ car, pour une loi $\mathcal{G}_0(p)$, l'espérance vaut $\dfrac{q}{p}$ et la variance $\dfrac{q}{p^2}$, avec $q = 1 - p$.

Exercice 5. $(**)$ Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \lambda 3^{-n}$.

a) Déterminer λ.

b) X a-t-elle plus de chances d'être paire ou d'être impaire ?

Corrigé :

a) La famille $(\{X = n\})_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements car $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$, donc

$$1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-n} = \frac{\lambda}{3(1 - \frac{1}{3})} = \frac{\lambda}{2}, \tag{1}$$

ce qui fait que $\lambda = 2$.

b) On a $\{X \in 2\mathbb{N}\} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{X = 2n\}$, les évènements de la réunion étant incompatibles deux à deux. Dès lors,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in 2\mathbb{N}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2n) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-2n} = \frac{2}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n \\ &= \frac{2}{9} \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2}{9} \times \frac{9}{8} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Donc, la probabilité que X soit impaire est $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ et X a plus de chance d'être impaire.

Exercice 6. $(**)$ Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de pmètre λ. Montrer que X a plus de chances de retourner une valeur paire plutôt qu'une valeur impaire.

Corrigé :

On a $\{X \in 2\mathbb{N}\} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{X = 2n\}$, les évènements de la réunion étant incompatibles deux à deux, donc

$$\mathbb{P}(X \in 2\mathbb{N}\} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2n) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} = e^{-\lambda} \mathrm{ch} \lambda.$$

De même, la probabilité que X prenne une valeur impaire est $e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!} = e^{-\lambda} \mathrm{sh} \lambda$.

Or, $e^{-\lambda} \mathrm{ch} \lambda - e^{-\lambda} \mathrm{sh} \lambda = e^{-2\lambda} > 0$, d'où le résultat.

Exercice 7. $(**)$ Une pièce équilibrée est lancée jusqu'à ce que Pile apparaisse. Quelle est la probabilité pour que le nombre de lancers nécessaires soit pair ?

Corrigé :

Soit A_i l'événement : "on obtient Face au i-ème lancer". Soit B_n l'évènement : "les lancers s'arrêtent au n-ième, où on a obtenu Pile". On a $B_1 = \overline{A_1}$ et $B_n = \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \bigcap \overline{A_n}$. L'indépendance des lancers et leur équiprobabilité font que $\mathbb{P}(B_n) = (1 - \mathbb{P}(A_n) \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (y compris si $n = 1$). Si C est l'événement : "il faut un nombre pair de lancers", on a $C = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_{2n}$, les événements étant incompatibles deux à deux, donc

$$\mathbb{P}(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_{2n}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{1}{3}.$$

On notera que la probabilité que les lancers ne s'arrêtent pas est $1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, donc la probabilité pour que le nombre de lancers nécessaires soit impair est $\frac{2}{3}$.

On peut aussi dire que (au vu de l'indépendance) le nombre X de lancers nécessaires pour obtenir Pile suit une loi géométrique de paramètre $1/2$, c'est-à-dire que l'on a $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. L'évènement cherché est $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{X = 2n\}$.

Donc, avec les incompatibilités deux à deux, la probabilité cherchée est

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{1}{3}.$$

Exercice 8. $(**)$ Trouver la loi de X quand $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(X = n) = \frac{4}{n}\mathbb{P}(X = n - 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Corrigé :

On pose $p_n = \mathbb{P}(X = n)$ pour tout $n \in X(\Omega)$.

Par télescopage multiplicatif, on a $p_n = \frac{4^n}{n!} p_0$.

De plus, $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1 = p_0 e^4$, donc $p_0 = e^{-4}$ et $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{P}(4)}$.

Exercice 9. $(* * *)$ Trouver la loi de X dans les cas suivants.

a) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et il existe $p \in]0, 1[$ tel que $\mathbb{P}(X = n) = p\mathbb{P}(X \geqslant n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

b) $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $4\mathbb{P}(X = n + 2) = 5\mathbb{P}(X = n + 1) - \mathbb{P}(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé :

On pose $p_n = \mathbb{P}(X = n)$ pour tout $n \in X(\Omega)$.

a) On a $\{X \geqslant n\} = \{X = n\} \cup \{X \geqslant n + 1\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, les deux évènements de la réunion étant incompatibles.
Donc, $\mathbb{P}(X \geqslant n) = p_n + \mathbb{P}(X \geqslant n + 1)$, soit, en multipliant par p,

$$p_n = pp_n + p_{n+1}.$$

Il s'ensuit que $p_{n+1} = (1-p)p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est donc géométrique de raison $1-p$, soit
$$p_n = (1-p)^{n-1}p_1.$$
On a $\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1$ car $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc $p_1 = p$ et $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}$.

b) On a une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est $4r^2 - 5r + 1 = 0 = (4r-1)(r-1)$. Il en résulte qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ avec $p_n = \alpha + \beta\left(\frac{1}{4}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$p_n \to \alpha$ et la série $(\sum p_n)$ converge, donc $\alpha = 0$.
Plus précisément, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1 = \frac{\beta}{1-1/4} = \frac{\beta}{3}$, donc $\beta = \frac{3}{4}$. On a donc $(X+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ avec $\mathbb{P}(X+1=n) = \mathbb{P}(X = n-1) = \frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Finalement, $\boxed{X+1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1/4)}$.

Exercice 10. $(**)$ Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p et soit $M \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les lois de $Z = \min(X, M)$ et de $Y = \max(X, M)$.

Corrigé :

$Z(\Omega) = \{1, \cdots, M\}$ avec, pour $k \leqslant M-1$, $\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}$ et
$$\mathbb{P}(Z = M) = \mathbb{P}(X \geqslant M) = \sum_{k=M}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=M}^{+\infty} pq^{k-1} = p\frac{q^{M-1}}{1-q} = q^{M-1}. \tag{2}$$
$Y(\Omega) = \{M, M+1, \cdots\}$ avec, pour $k > M$, $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}$ et
$$\mathbb{P}(Y = M) = \mathbb{P}(X \leqslant M) = \sum_{k=1}^{M} \mathbb{P}(X = k) = p\sum_{k=1}^{M} q^{k-1} = p\frac{1-q^M}{1-q} = 1 - q^M. \tag{3}$$

Exercice 11. $(*)$ Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
Calculer $\mathbb{E}((-1)^X)$ et $\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right)$.

Corrigé :

On a donc $X(\omega) = \mathbb{N}$ avec $\mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $Y = (-1)^X$ est une variable aléatoire (fonction de X) telle que $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$.
  Par le théorème de transfert, Y admet une espérance car la série de terme général $(-1)^n\mathbb{P}(X = n)$ converge absolument puisque $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$. On a ainsi
$$\mathbb{E}(Y) = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \times e^{-\lambda} = e^{-2\lambda} \tag{4}$$

- $Z = \frac{1}{1+X}$ est une variable aléatoire avec $Z(\Omega) = \{1/(n+1), n \in \mathbb{N}\}$. Comme $\frac{1}{1+n}\mathbb{P}(X = n) = o(\mathbb{P}(X = n))$ quand $n \to +\infty$, la série de terme général $\frac{1}{1+n}\mathbb{P}(X = n)$ converge abolument, donc Z admet une espérance finie. On a alors

$$\mathbb{E}(Z) = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(n+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

Exercice 12. $(**)$ Un programme d'échecs joue autant de parties que nécessaire jusqu'à sa première défaite, avec une modélisation $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité qu'il gagne la n-ième partie sachant qu'il a gagné la $(n-1)$-ième est $1/n$ (si $n \geqslant 2$ - il gagne donc toujours la première partie). Soit X la variable aléatoire retournant le nombre de parties gagnées avant la première partie perdue. On a donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit A_k l'évènement : "le programme gagne la k-ième partie". Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\{X = n\}$ en fonction d'évènements A_k ; en déduire que $\mathbb{P}(X = n) = \frac{n}{(n+1)!}$. Vérifier que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X = n) = 1$.

b) Calculer $\mathbb{E}(X+1)$; en déduire $\mathbb{E}(X)$.

c) Calculer $\mathbb{E}((X+1)(X-1))$; en déduire $\mathrm{Var}(X)$.

Corrigé :

a) $\{X = n\} = \left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k\right) \bigcap \overline{A_{n+1}}$.

Donc, avec la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\cdots\mathbb{P}(A_n|\bigcap_{k=1}^{n-1}A_k)\mathbb{P}(\overline{A_{n+1}}|\bigcap_{k=1}^{n}A_k).$$

Or, $\mathbb{P}(A_i|\bigcap\limits_{k=1}^{i-1}A_k) = \frac{1}{i}$, donc

$$\mathbb{P}(X = n) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n!}\frac{n}{n+1} = \frac{n}{(n+1)!}.$$

On a, en écrivant $n = (n+1) - 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 1 - \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N!} = 1.$$

Ceci légitime le choix de $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ car la probabilité de ne jamais perdre est alors nulle.

a) On applique le théorème de transfert avec $f : t \mapsto t+1$.

La série $\sum_{n\geqslant 1} f(n+1)\mathbb{P}(X = n)$ converge absolument (les termes sont positifs) car son terme général est $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$ avec $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!} = e$.

Par conséquent, $X+1$ admet une espérance finie et c'est e. Sachant que $X = (X+1) - 1$, alors X admet une espérance finie avec $\boxed{\mathbb{E}(X) = e - 1}$.

c) On a cette fois
$$(n+1)(n-1)\frac{n}{(n+1)!} = (n-1)\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-2)!}$$
si $n \geqslant 2$, ce terme étant nu pour $n = 1$.

Donc, $(X+1)(X-1)$ admet une espérance finie qui est e.

Puis $X^2 = (X+1)(X-1)+1$ admet une espérance finie,. Par conséquent X admet une variance avec
$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}((X+1)(X-1)) + 1 - \mathbb{E}(X)^2 = e + 1 - (e-1)^2 = e(3-e).$$

$\boxed{\textbf{Exercice 13.}}$ $(**)$ Soit $\lambda \in]0, +\infty[$. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

a) Soit $R(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$. Trouver a, b, c tels que $R(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$.
b) Calculer λ.
c) Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.
d) X admet-elle une variance ?

Corrigé :

a) On a
$$\begin{aligned}\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2} &= \frac{a(x+1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x+1)}{x(x+1)x+2)} \\ &= \frac{(a+b+c)x^2 + (3a+2b+c)x + 2a}{x(x+1)(x+2)},\end{aligned}$$
donc on prend $a = 1/2$, puis $2b + c = -3/2$ et $b + c = -1/2$, ce qui donne $b = -1$ et $c = 1/2$. Finalement, $R(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)}$.

b) On a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$ car les $\{X = n\}$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) forment un système complet d'événements. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. De a), il résulte que
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(X = n) &= \lambda \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} \right) \\ &= \frac{\lambda}{2} \left(\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right),\end{aligned}$$
donc, par télescopage additif,
$$\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{N+2} \right) = \lambda \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+1)} + \frac{1}{2(N+2)} \right).$$
$N \to +\infty$ donne finalement $\boxed{\lambda = 4.}$

c) La série $\sum_{n\geqslant 1} n\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{4}{(n+1)(n+2)}$ converge car, en $+\infty$, $\frac{4}{(n+1)(n+2)} \sim \frac{4}{n^2}$. Donc, X admet une espérance.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a, par télescopage additif,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{(k+1)(k+2)} \\ &= 4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = 4\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k+1}\right) = 2 - \frac{4}{n+2}. \end{aligned}$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = 2$. On arrive finalement à $\boxed{\mathbb{E}(X)=2}$.

d) X admet une variance si et seulement si X^2 admet une espérance (on a déjà l'existence de $\mathbb{E}(X)$). Or,

$$n^2\mathbb{P}(X=n) = \frac{4n}{(n+1)(n+2)} \sim \frac{4}{n},$$

donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique). Donc, $\sum_{n\geqslant 1} n^2\mathbb{P}(X=n)$ diverge et, comme elle est à termes positifs, le théorème de transfert fait que $\boxed{X \text{ n'admet pas de variance}}$.

Exercice 14. $(**)$ Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que

$$\mathbb{P}(X=k) = \mathrm{e}^{-2}(1+\alpha k)\frac{2^k}{4(k!)}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Déterminer α.

Corrigé :
La famille $(\{X=k\})_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements car $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Donc

$$\begin{aligned} 1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) &= \frac{e^{-2}}{4}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k}{k!} + \alpha\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^k}{(k-1)!}\right] \\ &= \frac{e^{-2}}{4}\left[e^2 + \alpha\times 2e^2\right] = \frac{1+2\alpha}{4}. \end{aligned}$$

Il en résulte que $1+2\alpha = 4$, donc que $\boxed{\alpha = \frac{3}{2}}$.

Exercice 15. $(**)$ Une urne contient des boules blanches, rouges et vertes, en proportions respectives b, r et v (on a donc $b, r, v \in]0,1[$ et $b+r+v=1$). On y effectue des tirages successifs avec remise (donc indépendants), et on s'arrête au premier changement de couleur. On note X la variable aléatoire retournant le nombre de tirages effectués. Déterminer la loi de X et montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-v} - 2.$$

Corrigé :
Pour qu'il y ait changement de couleur, il faut qu'il y ait au moins deux tirages, donc $X(\Omega) = (\mathbb{N} \setminus \{0,1\}) \cup \{+\infty\}$.

On a en fait $X=k$ si les $k-1$ premières boules tirées sont de la même couleur et la k-ième d'une des 2 autres couleurs.

On décompose suivant la couleur de la première boule tirée. Ainsi, si B_i (resp. R_i et V_i) désigne l'événement "la i-ième boule tirée est blanche" (resp. rouge) (resp. verte), on a alors

$$\begin{aligned} \{X=k\} &= (B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap\overline{B_k})\cup(R_1\cap\cdots\cap R_{k-1}\cap\overline{R_k}) \\ &\quad \cup(V_1\cap\cdots\cap V_{k-1}\cap\overline{V_k}), \end{aligned}$$

réunion disjointe de trois événements composés eux-mêmes de k événements mutuellement indépendants. Compte-tenu que $\mathbb{P}(B_i)=b$, $\mathbb{P}(R_i)=r$ et $\mathbb{P}(V_i)=v$, on a donc, pour $k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$,

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k)=(1-b)b^{k-1}+(1-r)r^{k-1}+(1-v)v^{k-1}}.$$

On a $\{X=+\infty\}=\overline{\bigcup_{k=2}^{+\infty}\{X=k\}}$, les éléments de la réunion étant incompatibles deux à deux, donc

$$\begin{aligned} 1-\mathbb{P}(X=+\infty) &= \sum_{k=2}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) \\ &= (1-b)\sum_{k=2}^{+\infty}b^{k-1}+(1-r)\sum_{k=2}^{+\infty}r^{k-1}+(1-v)\sum_{k=2}^{+\infty}v^{k-1} \\ &= (1-b)\frac{b}{1-b}+(1-r)\frac{r}{1-r}+(1-v)\frac{v}{1-v}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\mathbb{P}(X=+\infty)=1-(r+b+v)=0$.

$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=2}^{+\infty}k\mathbb{P}(X=k)$. On connait l'espérance d'une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, c'est $\sum_{k=1}^{+\infty}kp(1-p)^{k-1}=\frac{1}{p}$.

On a donc, avec $p=1-b$, $\sum_{k=2}^{+\infty}k(1-b)b^{k-1}=\frac{1}{1-b}-(1-b)$ (la somme part de $k=2$ donc il faut enlever le terme correspondant à $k=1$). On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=2}^{+\infty}k\left[(1-b)b^{k-1}+(1-r)r^{k-1}+(1-v)v^{k-1}\right] \\ &= \frac{1}{1-b}-(1-b)+\frac{1}{1-r}-(1-r)+\frac{1}{1-v}-(1-v) \\ &= \frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-r}+\frac{1}{1-v}-3+(b+r+v) \end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbb{E}(X)=\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-r}+\frac{1}{1-v}-2}$.

Exercice 16. $(*)$ Pour envoyer des colis, une entreprise fait appel à deux sociétés de transport A et B. La probabilité de retard de livraison est de 0,1 pour la société A et de 0,2 pour la société B. On note X_A (resp. X_B) le nombre de livraisons sans retard de la société A (resp. de la société B) avant son premier retard. On note $Z=\max(X_A,X_B)$.

a) Déterminer la loi de X_A. Montrer que $\mathbb{P}(X_A<k)=1-(0,9)^k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Que valent $\mathbb{P}(X_A<k)$ et $\mathbb{P}(X_A\leqslant k)$?

b) Vérifier que l'évènement $\{Z=k\}$ peut se décomposer de la manière suivante :

$$\{Z=k\}=(\{X_A<k\}\cap\{X_B=k\})\cup(\{X_A=k\}\cap\{X_B\leqslant k\})$$

c) En utilisant l'indépendance de X_A et X_B, en déduire que

$$\mathbb{P}(Z=k)=0,2(0,8)^k+0,1(0,9)^k-0,28(0,72)^k.$$

d) Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

Corrigé :

a) $X_A(\Omega)=\mathbb{N}$ avec, si A_i est l'évènement : "la i-ième livraison de A est à l'heure", $\{X_A=k\}=A_1\bigcap\cdots\bigcap A_{k-1}\bigcap\overline{A_k}$. Les livraisons étant indépendantes avec $\mathbb{P}(A_i)=0,9$, on a $\mathbb{P}(X_A=k)=0,1(0,9)^k$.

Pour $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_A<k) &= \sum_{i=0}^{k-1}\mathbb{P}(X_A=i)=0,1\times\sum_{i=0}^{k-1}(0,9)^i\\ &= 0,1\frac{1-(0,9)^k}{1-0,9}=1-(0,9)^k.\end{aligned}$$

La formule est encore valable pour $k=0$ puisque $\mathbb{P}(X_A<0)=0$ et $0,9^0=1$. On a donc $\mathbb{P}(X_A<k)=1-(0,9)^k$ et $\boxed{\mathbb{P}(X_A\leqslant k)=\mathbb{P}(X_A<k+1)=1-(0,9)^{k+1}}$.

b) $\{Z=k\}=(\{Z=k\}\cap\{X_A<X_B\})\cup(\{Z=k\}\cap\{X_A\geqslant X_B\})$ avec

$$\begin{aligned}\{Z=k\}\cap\{X_A<X_B\} &= \{\max(X_A,X_B)=k\}\cap\{X_A<X_B\}\\ &= \{X_A<k\}\cap\{X_B=k\}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\{Z=k\}\cap\{X_A\geqslant X_B\} &= \{\max(X_A,X_B)=k\}\cap\{X_A\geqslant X_B\}\\ &= \{X_A=k\}\cap\{X_B\leqslant k\}.\end{aligned}$$

On a bien la décomposition

$$\boxed{\{Z=k\}=(\{X_A<k\}\cap\{X_B=k\})\cup(\{X_A=k\}\cap\{X_B\leqslant k\})}.$$

c) On a alors, en utilisant d'abord l'incompatibilité de $\{X_A<k\}\cap\{X_B=k\}$ et de $\{X_A=k\}\cap\{X_B\leqslant k\}$, puis l'indépendance de X_A et X_B,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=k) &= \mathbb{P}(X_A<k)\mathbb{P}(X_B=k)+\mathbb{P}(X_A=k)\mathbb{P}(X_B\leqslant k)\\ &= 0,2(0,8)^k(1-(0,9)^k)+0,1(0,9)^k(1-(0,8)^{k+1})\\ &= 0,2(0,8)^k-0,2(0,72)^k+0,1(0,9)^k-0,08(0,72)^k\end{aligned}$$

ce qui donne bien

$$\boxed{\mathbb{P}(Z=k)=0,2(0,8)^k+0,1(0,9)^k-0,28(0,72)^k}.$$

d) Ici, la convergence absolue de $\sum k\mathbb{P}(Z=k)$ équivaut à la convergence, puisque les termes de la série sont positifs.

On a, pour $|x|<1$, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ et on peut dériver terme à terme à l'intérieur du domaine de convergence, donc $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k = \sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

En appliquant ce résultat à $x=0,8$, puis à $x=0,9$ et à $x=0,72$ tous trois dans $]0,1[$.

On a alors $\mathbb{E}(Z) = \frac{0,8}{0,2} + \frac{0,9}{0,1} - \frac{0,72}{0,28}$, soit $\boxed{\mathbb{E}(Z) \approx 10,4}$.

Exercice 17. $(**)$ On admet que, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{k\geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge avec, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}.$$

Soit $p \in]0,1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$. On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t=0$ (le temps est exprimé en secondes). On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte, les tirs de laser étant indépendants. La bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser.
Le premier rayon laser est envoyé à l'instant $t=1$. La bactérie ne meurt que lorsqu'elle a été touchée r fois par le rayon laser.
Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

a) Déterminer la loi de X.

b) Prouver que X admet une espérance et la calculer.

Corrigé :

a) On a $X(\Omega) = [\![r, +\infty [\![$.

Soit $n \in [\![r, +\infty [\![$. $X=n$ signifie que n tirs de laser ont été nécessaires pour tuer la bactérie, c'est-à-dire que, sur les $n-1$ premiers tirs de laser, la bactérie est touchée $(r-1)$ fois et non touchée $((n-1)-(r-1))$ fois, et enfin, qu'elle est touchée au n-ième tir.

Si on note $A_{r-1,n-1}$ cet évènement, il est la conséquence de la réalisation de $n-1$ expériences indépendantes de type succès-échec devant déboucher sur $r-1$ succès. Dès lors, $\mathbb{P}(A_{r-1,n-1}) = \binom{n-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^{(n-1)-(r-1)}$ par la loi binomiale.

Puis, si B_n est l'évènement : "la bactérie est touchée au n-ième tir", $\mathbb{P}(B_n) = p$ et $\{X=n\} = A_{r-1,n-1} \cap B_n$, donc, par indépendance, $\mathbb{P}(X=n) = \binom{n-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^{(n-1)-(r-1)} \times p$, c'est-à-dire, pour tout $n \in [\![r, +\infty [\![$,

$$\boxed{\mathbb{P}(X=n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}}.$$

b) Soit $n \in [\![r, +\infty [\![$. On a

$$\begin{aligned} n\mathbb{P}(X=n) &= n\binom{n-1}{r-1} p^r(1-p)^{n-r} = n\frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!} p^r(1-p)^{n-r} \\ &= r\frac{n!}{(n-r)!r!} p^r(1-p)^{n-r} = r\binom{n}{r} p^r(1-p)^{n-r} \end{aligned}$$

avec $p \in]0,1[$, donc $(1-p) \in]0,1[$. On en déduit, d'après le résultat admis, que la série $\sum_{n \geqslant r} n\mathbb{P}(X=n)$ converge, donc que $\mathbb{E}(X)$ existe avec

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=r}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n) = rp^r \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r}(1-p)^{n-r} = r\frac{p^r}{(1-(1-p))^{r+1}},$$

c'est-à-dire $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{r}{p}}$ (que l'on a directement d'après le cours si on reconnaît la loi de Pascal.)

Exercice 18. $(***)$ Une entreprise stocke en début d'année n unités d'un produit donné. La vente d'un exemplaire rapporte b euros alors qu'un produit non vendu dans l'année coûte a euros. On suppose avoir modélisé les demandes d'achat et disposer d'une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et retournant le nombre de produits demandés, avec $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

a) Exprimer la variable R_n retournant le revenu annuel en fonction de X et de n ; en déduire l'expression du revenu moyen R_n en fonction de $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(k-n)\mathbb{P}(X=k)$.

b) Montrer que $\mathbb{E}(R_{n+1}) - \mathbb{E}(R_n) = b - (a+b)\mathbb{P}(X \leqslant n)$.

c) On prend $b = 2a$ et on suppose que X suit la loi géométrique de paramètre $p = 1/10$. Déterminer la valeur optimale n^* du stock qui permet d'optimiser $\mathbb{E}(R_n)$.

Corrigé :

a) Si $X < n$, on a $R_n = bX - a(n-X)$ et, si $X \geqslant n$, on a $R_n = nb$. Dès lors, avec le théorème de transfert, il vient

$$\mathbb{E}(R_n) = \sum_{k=0}^{n-1}(bk - a(n-k))\mathbb{P}(X=k) + \sum_{k=n}^{+\infty} nb\mathbb{P}(X=k),$$

la série étant bien absolument convergente avec $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) = 1$ qui donne $\sum\limits_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) = 1 - \sum\limits_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X=k)$.

Cette dernière égalité donne

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(R_n) &= (a+b)\sum_{k=0}^{n-1} k\mathbb{P}(X=k) - n(a+b)\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X=k) + nb \\ &= nb + (a+b)\sum_{k=0}^{n-1}(k-n)\mathbb{P}(X=k).\end{aligned}$$

b) On a alors, comme $k-(n+1) = k-n-1$,

$$\mathbb{E}(R_{n+1}) - \mathbb{E}(R_n) = b - (a+b)\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k) = b - (a+b)\mathbb{P}(X \leqslant n),$$

car $\{X \leqslant n\} = \bigcup\limits_{k=0}^{n}\{X=k\}$, les évènements de la réunion étant incompatibles deux à deux.

c) On a donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ avec $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Donc,

$$\mathbb{P}(X \leqslant n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = p\frac{1-(1-p)^{n+1}}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^{n+1}.$$

Il en résulte que

$$\mathbb{E}(R_{n+1}) - \mathbb{E}(R_n) = a(2 - 3(1-(0,9)^{n+1}) = 3a((0,9)^{n+1} - 1/3).$$

La fonction $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto (0,9)^{x+1} - 1/3$ a pour dérivée $\ln(0,9)(0,9)^{x+1} < 0$, donc elle décroît.

Par ailleurs, $(0,9)^{x+1} = \frac{1}{3}$ équivaut à $x = -1 - \frac{\ln 3}{\ln(0,9)}\#9,4$. Si $n \leqslant x$, $\mathbb{E}(R_{n+1}) \geqslant \mathbb{E}(R_n)$ tandis que, si $n \geqslant x$, $\mathbb{E}(R_{n+1}) \leqslant \mathbb{E}(R_n)$.

On a donc $\mathbb{E}(R_1) \leqslant \cdots \leqslant \mathbb{E}(R_9)$ et $E(\mathbb{R}_{10}) \geqslant \mathbb{E}(R_{11}) \geqslant \cdots$.

De plus, $\mathbb{E}(R_{10}) - \mathbb{E}(R_9)\#0,015a > 0$, donc $\boxed{n^* = 10}$.

Exercice 19. $(**)$ Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On définit une autre variable aléatoire Y par la règle suivante :
• si X prend une valeur impaire alors Y prend la valeur 0,
• si X prend une valeur paire alors Y prend la valeur $X/2$.
Déterminer la loi de Y et son espérance.

Corrigé : La variable Y prend les mêmes valeurs que X, c'est-à-dire que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X=0) + \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=2n+1) &= e^{-\lambda}\left(1+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\\ &= e^{-\lambda}\left(1+sh(\lambda)\right).\end{aligned}$$

et pour tout $k \geqslant 1$, $\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(X=2k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$.

On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2}e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k-1)!}\\ &= \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!} = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda}\frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{2}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \dfrac{\lambda}{4}\left(1-e^{-2\lambda}\right)}$.

Exercice 20. $(***)$ Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit la variable aléatoire Y par : $Y = \frac{X}{2}$, si X est pair ; $Y = \frac{1-X}{2}$, si X est impair. Déterminer la loi de Y est son espérance dans chacun des cas suivants :

a) X suit la loi géométrique de paramètre p ;
b) X suit la loi binomiale négative de paramètre p ;
c) X suit la loi de Poisson de paramètre λ.

Corrigé :

Pour les trois cas, $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. La loi de Y est définie de la manière suivante :
Si $X = 2k$, alors $Y = k$; si $X = 2k+1$, alors $Y = -k$. Ainsi $Y = \mathbb{Z}$ et $[Y = 0] = [X = 0] \cup [X = 1]$,

- si $k > 0$, $[Y = k] = [X = 2k]$,
- si $k < 0$, $[Y = k] = [X = 1 - 2k]$.

a) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}$, d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = 0) &= \mathbb{P}(X = 1) = p, \\
\mathbb{P}(Y = k) &= p(1-p)^{2k-1}, \text{ si } k > 0, \\
\mathbb{P}(Y = k) &= p(1-p)^{-2k}, \text{ si } k < 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{2k-1} + \sum_{k=-1}^{-\infty} kp(1-p)^{-2k} \\
&= p(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty} k((1-p)^2)^{k-1} - p(1-p)^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k((1-p)^2)^{k-1} \\
&= p^2(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty} k((1-p)^2)^{k-1} = \frac{p^2(1-p)}{(1-(1-p)^2)^2}.
\end{aligned}$$

b) La variable aléatoire X suit une loi binomiale négative de paramètre p (c'est-à-dire que $r = 1$). On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^n$, d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = 0) &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = p + p(1-p), \\
\mathbb{P}(Y = k) &= p(1-p)^{2k}, \text{ si } k > 0, \\
\mathbb{P}(Y = k) &= p(1-p)^{1-2k}, \text{ si } k < 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{2k} + \sum_{k=-1}^{-\infty} kp(1-p)^{1-2k} \\
&= p(1-p)^2\sum_{k=1}^{+\infty} k((1-p)^2)^{k-1} - p(1-p)^3 \sum_{k=1}^{+\infty} k((1-p)^2)^{k-1} \\
&= p^2(1-p)^2\sum_{k=1}^{+\infty} k((1-p)^2)^{k-1} = \frac{p^2(1-p)^2}{(1-(1-p)^2)^2}.
\end{aligned}$$

c) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$, d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = 0) &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = e^{-\lambda}(1 + \lambda), \\
\mathbb{P}(Y = k) &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}, \text{ si } k > 0, \\
\mathbb{P}(Y = k) &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^{1-2k}}{(1-2k)!}, \text{ si } k < 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \lambda\frac{e^{-\lambda}}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!} - \lambda\frac{e^{-\lambda}}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} + \frac{e^{-\lambda}}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}.
\end{aligned}$$

On a maintenant :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2} = ch(\lambda)$$

et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{2} = sh(\lambda).$$

Après quelques calculs, on obtient finalement : $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}e^{-2\lambda}\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)$.

Utilisation de la fonction génératrice

Exercice 21. $(*)$ Soit α et p des éléments respectifs de $\mathbb{N}^*$ et de $]0,1[$. On pose $q = 1-p$. Déterminer la fonction génératrice d'une v.a.r. X dont la loi est définie par :

$$P(X=n) = pq^n \text{ si } n \in \{0, 1, \dots, \alpha-1\} \text{ et } P(X=\alpha) = q^{\alpha}.$$

Corrigé :

Puisque $X(\Omega)$ est un ensemble fini, la fonction génératrice de X est définie sur $\mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} G_X(t) = \mathbb{E}\left[t^X\right] &= \sum_{n=0}^{\alpha} t^n \mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=0}^{\alpha-1} t^n pq^n + t^{\alpha}q^{\alpha} \\ &= p\sum_{n=0}^{\alpha-1}(tq)^n + (tq)^{\alpha} = p\frac{1-(tq)^{\alpha}}{1-tq} + (tq)^{\alpha}. \end{aligned}$$

Exercice 22. $(***)$ Un sauteur en hauteur tente de franchir les hauteurs successives $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \dots$ Il n'essaie de franchir la hauteur x_n que s'il a réussi à passer les hauteurs précédentes. Si le sauteur a déjà franchi les $n-1$ premières hauteurs ($n \geqslant 1$), on suppose que la probabilité de succès à la hauteur x_n est $\frac{1}{n}$. Le sauteur est éliminé à son premier échec. On note X la variable aléatoire "numéro du dernier saut réussi". Si le sauteur ne franchit pas x_1, on notera $X = 0$.

a) Trouver la loi de X et vérifier que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) = 1$.

b) Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Corrigé :

a) L'ensemble des valeurs possibles pour X est : $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

On note A_n : "le sauteur a franchi la hauteur n". Ainsi, par hypothèse, pour $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) = \frac{1}{n}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, l'événement $[X=n]$ signifie que le sauteur a passé les hauteurs $1, 2, \cdots, n$ et qu'il a échoué à la hauteur $n+1$. Ainsi

$$\begin{aligned} &[X=0] = \overline{A}_1 \\ &[X=1] = A_1 \cap \overline{A}_2 \\ &[X=2] = A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \\ &\qquad \vdots \\ &[X=n] = A_1 \cap \ldots A_n \cap \overline{A}_{n+1} \end{aligned}$$

On a d'abord, $\mathbb{P}(X=0)=1-1=0$ et d'après la formule des probabilités totales, on a ensuite

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=n) &= \mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n\cap\overline{A}_{n+1})\\ &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\ldots\mathbb{P}(A_n|A_1\cap\ldots\cap A_{n-1})\mathbb{P}(\overline{A}_{n+1}|A_1\cap\ldots\cap A_n)\\ &= \frac{1}{1}\times\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{n}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

On a $G_X(t)=\mathbb{E}[t^X]=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}t^n\mathbb{P}(X=n)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}t^n\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)$, soit $G_X(t)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{(n+1)!}$. Or $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}-1=e^t-1$ (série exponentielle) et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{(n+1)!}=\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{1}{t}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{t}\left(e^t-1-t\right).$$

Donc, $G_X(t)=e^t-1-\frac{1}{t}\left(e^t-1-t\right)=e^t\left(1-\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{t}$.

On a alors $G_X(1)=e(1-1)+\frac{1}{1}$, soit $G_X(1)=1$, c'est-à-dire $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)=1$.

b) $G_X(t)=e^t\left(1-\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{t}$ donc $G'_X(t)=e^t\left(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)-\frac{1}{t^2}$ et $G''_X(t)=e^t\left(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t^3}\right)+\frac{2}{t^3}$.

On a alors, avec $t=1$, $G'_X(1)=e^1\left(1-\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right)-\frac{1}{1}=e-1$, donc $\boxed{\mathbb{E}[X]=e-1}$ et

$$G''_X(1)=e^1\left(1-\frac{1}{1}+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{1^2}-\frac{2}{1^3}\right)+\frac{2}{1^3}=2.$$

On en déduit $\mathrm{Var}(X)=2+(e-1)-(e-1)^2=1+e-e^2+2e-1$, soit $\boxed{\mathrm{Var}(X)=e(3-e)}$.

Exercice 23. $(*)$ Soit $p\in]0,1[$, $q=1-p$ et, pour $|s|\leqslant 1$, $\varphi(s)=\frac{p}{1-qs}$.
Vérifier que, si $a_n=(n+1)p^2q^n$, la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit la loi de probabilité d'une variable aléatoire et exprimer sa fonction génératrice à l'aide de φ.
On rappelle que, pour $x\in]-1,1[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2}$.

Corrigé :

On a en utilisant le rappel :$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n=p^2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)q^n=\frac{p^2}{(1-q)^2}=\frac{p^2}{p^2}=1$.
La famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit ainsi la loi de probabilité d'une variable aléatoire X telle que $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=n)=a_n=(n+1)p^2q^n$. Soit $s\in]-1,1[$. Alors

$$\begin{aligned}G_X(s) &= \mathbb{E}\left[s^X\right]=\sum_{n=0}^{+\infty}s^n\mathbb{P}(X=n)=\sum_{n=0}^{+\infty}s^n(n+1)p^2q^n\\ &= p^2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(sq)^n=\frac{p^2}{(1-sq)^2}=(\varphi(s))^2\end{aligned}$$

en utilisant à nouveau le rappel.

Exercice 24. $(**)$ Soit $a\in\mathbb{R}$ et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Trouver a pour qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ telle que la loi de X soit définie par

$$\mathbb{P}(X=n)=\frac{1}{4}\left(\frac{1+a^n}{n!}\right)\quad n\in\mathbb{N},\forall$$

.

b) Calculer alors la fonction génératrice $G_X(t)$ de X. En déduire l'espérance de X.

Corrigé :

a) Si $p_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1+a^n}{n!}\right)$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{n!}\right) = \frac{1}{4}\left(e+e^a\right)$, la série étant au passage convergente.

La somme de cette série vaut 1 si et seulement si $e+e^a=4$, ce qui équivaut à $a=\ln(4-e)$ car on a bien $4-e>0$. On a en fait $e<3$, donc $4-e>1$ et ainsi $a>0$, ce qui donne $p_n \geqslant 0$.

Donc, il existe bien une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que $\mathbb{P}(X=n)=p_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

b) On a alors

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n = \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(at)^n}{n!}\right) = \frac{1}{4}\left(e^t+e^{at}\right).$$

G_X est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $G_X'(t) = \frac{1}{4}\left(e^t+ae^{at}\right)$,donc X admet une espérance finie qui est

$$\mathbb{E}(X) = G_X'(1) = \frac{1}{4}\left(e+ae^a\right) = \frac{1}{4}\left(e+(4-e)\ln(4-e)\right).$$

Exercice 25. $(**)$ Soit $p\in]0,1[$ et $q=1-p$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

a) Montrer qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ telle que la loi de X soit définie par $\mathbb{P}(X=n) = -\frac{q^n}{n\ln p}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Calculer alors la somme $G_X(t)$ de la série génératrice de X ; en déduire l'espérance et la variance de X.

Corrigé :

a) Posons $p_n = -\frac{q^n}{n\ln p}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. p_n est bien défini avec $p_n>0$ car $p,q\in]0,1[$. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = -\frac{1}{\ln p}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^n}{n} = \frac{\ln(1-q)}{\ln p} = 1, \text{car } 1-q=p.$$

Donc, il existe bien une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que $\mathbb{P}(X=n)=p_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

b) On a (au moins pour $t\in[-1,1]$), $G_X(t) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(qt)^n}{n\ln p} = \frac{\ln(1-qt)}{\ln p}$.

On a, si $|t|<1/q$, $G_X'(t) = -\frac{q}{\ln p(1-qt)}$, donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = -\frac{q}{p\ln p}}$, tandis que $G_X''(t) = -\frac{q^2}{\ln p(1-qt)^2}$, donc

$$\mathrm{Var}(X) = -\frac{q^2}{p^2\ln p} - \frac{q}{p\ln p} + \frac{q^2}{p^2(\ln p)^2} = \frac{-q^2\ln p - qp^2\ln p - q^2}{p^2(\ln p)^2} = -\frac{q(q+\ln p)}{p^2(\ln p)^2}.$$