Probabilités L2

Exercices Chapitre 4

Variables aléatoires finies

Exercice 1. $(*)$
Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, a\}$, où $a \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{E}[X] = 6$. Déterminer a.

Corrigé :

On a $X(\Omega) = \{1, \cdots, a\}$ avec $a \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{a+1}$ pour tout $k \in \{1, \cdots, a\}$ (probabilité constante avec $a + 1$ valeurs).
On a donc

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{a} k\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{a+1}\sum_{k=1}^{a} k = \frac{a(a+1)}{2(a+1)} = \frac{a}{2}.$$

Ainsi $\mathbb{E}[X] = 6$ si $\dfrac{a}{2} = 6$, soit $\boxed{a = 12}$.

Exercice 2. $(**)$
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{-1, 1\}$ et de loi définie par $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = 1/2$.

1. Calculer $\mathbb{P}(|X| = 1)$ et $\mathbb{P}(X^2 - 3X + 2 = 0)$.
2. Calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{V}(X)$ et $\sigma(X)$.
3. Calculer $\mathbb{E}\left[\frac{X}{X+2}\right]$.
4. Quelle est la loi de $Y = \frac{X+1}{2}$?

Corrigé :

a) On a $X(\Omega) = \{-1, 1\}$, donc $|X|(\Omega) = \{1\}$ et $\mathbb{P}(|X| = 1) = 1$.
$X^2-3X+2 = (X-1)(X-2)$, donc $[X^2-3X+2 = 0] = [X = 1]\cup[X = 2] = [X = 1]\cup\emptyset = [X = 1]$, soit $\boxed{\mathbb{P}(X^2 - 3X + 2 = 0) = 1/2.}$

b) On a $\mathbb{E}[X] = (-1) \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 0$ et $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - 0^2 = (-1)^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{2} = 1$, le calcul de $Var(X)$ étant fait avec le théorème de transfert. Donc, $\boxed{\mathbb{E}[X] = 0,\ \sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = 1}$.

c) Avec le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}\left[\frac{X}{X+2}\right] = \frac{-1}{2-1} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2+1} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}.$$

d) On a $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ avec $[Y = 1] = [X = 1]$. Ainsi
$\boxed{Y \text{ suit la loi de Bernoulli } \mathcal{B}(1/2)}$.

Exercice 3. $(**)$ (Exercice 4.6 du polycopié)
L'examen du code de la route se compose de 40 questions avec 4 réponses possibles pour chacune dont une seule est correcte. Un candidat qui se présente connaît la réponse à certaines questions et y répond alors à coup sûr. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard entre les 4 réponses proposées. On suppose toutes les questions indépendantes. Pour chacune, la probabilité que le candidat connaisse la vraie réponse est p. Soit, pour $1 \leqslant i \leqslant 40$, A_i l'événement : "le candidat donne la bonne réponse à la i-ème question". On note S la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses.

1. Calculer $\mathbb{P}(A_i)$
2. Quelle est la loi de S ? Justifier !
3. A quelle condition sur p le candidat donnera en moyenne au moins 36 bonnes réponses ?

Corrigé :

1. Notons C_i l'évènement “le candidat connait la réponse à la question i”. On a

$$\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}_{C_i}(A_i)\mathbb{P}(C_i) + \mathbb{P}_{\bar{C}_i}(A_i)\mathbb{P}(\bar{C}_i) = 1 \times p + \frac{1}{4} \times (1-p)$$

donc $\boxed{\mathbb{P}(A_i) = \frac{1+3p}{4}}$.

2. Les questions étant toutes indépendantes, on est en présence d'un schéma de Bernoulli où la variable S compte le nombre de bonnes réponses. Ainsi $\boxed{S \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}\left(40 \ ; \ \frac{1+3p}{4}\right)}$.

3. L'espérance de S vaut $\mathbb{E}[S] = 40\frac{1+3p}{4}$, soit $\boxed{\mathbb{E}[S] = 10(1+3p)}$. On a donc $\mathbb{E}[S] \geqslant 36$ si et seulement si $10(1+3p) \geqslant 36$, ce qui revient à dire $\boxed{p \geqslant \frac{13}{15}}$.

Exercice 4. $(*)$ (Exercice 4.13 du polycopié)

D'une urne contenant 6 boules rouges et 4 boules noires, on opère un tirage sans remise de 3 boules. Soit X le nombre de boules rouges extraites.

1. Donner numériquement la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}(X)$.

Corrigé :

a) Les valeurs possibles de X sont : 0, 1, 2, 3. Les tirages sont sans remise et non ordonnés donc $\text{card}(\Omega) = \binom{10}{3} = 120$.

$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30},$$
$$\mathbb{P}(X=1) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{6 \times 6}{120} = \frac{3}{10},$$
$$\mathbb{P}(X=2) = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{4 \times 15}{120} = \frac{1}{2},$$
$$\mathbb{P}(X=3) = \frac{\binom{6}{3}}{120} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$$

Ainsi, $\boxed{p_0 = \frac{1}{30}, p_1 = \frac{9}{30}, p_2 = \frac{15}{30}, p_3 = \frac{5}{30}}$.

On a bien $\sum_{i=0}^{3} p_i = 1$.

b) Par définition de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}[X] = 0 \times \mathbb{P}(X=0) + 1 \times \mathbb{P}(X=1) + 2 \times \mathbb{P}(X=2) + 3 \times \mathbb{P}(X=3)$$
$$= 0 \times \frac{1}{30} + 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{9}{5}.$$

Ainsi, $\boxed{\mathbb{E}[X] = \frac{9}{5}}$. De même, on a

$$\mathbb{E}[X^2] = 0^2 \times \mathbb{P}(X=0) + 1^2 \times \mathbb{P}(X=1) + 2^2 \times \mathbb{P}(X=2) + 3^2 \times \mathbb{P}(X=3)$$
$$= 0 \times \frac{1}{30} + 1 \times \frac{3}{10} + 4 \times \frac{1}{2} + 9 \times \frac{1}{6} = \frac{19}{5},$$

d'où $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{19}{5} - \frac{81}{25} = \frac{95-81}{25}$, soit $\boxed{Var(X) = \frac{14}{25}}$.

Remarque : on peut aussi reconnaître la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(3, 6, 10)$ et utiliser les résultats du cours.

Exercice 5. $(**)$

À l'arrivée d'une course, il y a 9 chevaux : 4 noirs et 5 alezans. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de chevaux alezans précédant le premier cheval noir.
Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Corrigé :

$X(\Omega) = [\![0, 5]\!]$ avec
- $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{4}{9} = \frac{56}{126}$,
- $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{18} = \frac{35}{126}$,
- $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{10}{63} = \frac{20}{126}$,
- $\mathbb{P}(X = 3) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{5}{63} = \frac{10}{126}$,
- $\mathbb{P}(X = 4) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{63} = \frac{4}{126}$,
- $\mathbb{P}(X = 5) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{126}$

k	0	1	2	3	4	5	total
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{56}{126}$	$\frac{35}{126}$	$\frac{20}{126}$	$\frac{10}{126}$	$\frac{4}{126}$	$\frac{1}{126}$	1
$k\mathbb{P}(X = k)$	0	$\frac{35}{126}$	$\frac{40}{126}$	$\frac{30}{126}$	$\frac{16}{126}$	$\frac{5}{126}$	1
$k^2\mathbb{P}(X = k)$	0	$\frac{35}{126}$	$\frac{80}{126}$	$\frac{90}{126}$	$\frac{64}{126}$	$\frac{25}{126}$	$\frac{294}{126}$

Ainsi, $\boxed{\mathbb{E}[X] = 1}$ et $\mathbb{E}[X^2] = \frac{294}{126}$.

On a alors $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{294}{126} - 1 = \frac{168}{126}$, soit, en simplifiant par 6, $\boxed{Var(X) = \frac{28}{21}}$.

Exercice 6. $(**)$

On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à ce qu'il ne reste plus dans l'urne que des boules de 2 couleurs différentes. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Corrigé :

On a 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes, donc, pour qu'il ne reste plus que 2 couleurs, on doit faire, au minimum 1 tirage et au maximum 4 tirages, soit $X(\Omega) = [\![1\ ;\ 4]\!]$.
- $X = 1$ si on tire la boule rouge et $\boxed{\mathbb{P}(X = 1) = 1/6}$;
- $X = 2$ si on tire les 2 boules noires ou bien 1 noire puis la rouge ou encore 1 jaune puis la rouge et $\boxed{\mathbb{P}(X = 2)} = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{3}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{2+2+3}{30} \boxed{= 7/30}$;
- $X = 3$ avec 1 noire puis 1 jaune puis, soit la rouge, soit l'autre noire, ou bien 1 jaune puis 1 noire puis, soit la rouge, soit l'autre noire, ou bien les 3 jaunes, ou encore 2 jaunes puis la rouge et $\boxed{\mathbb{P}(X = 3)} = \frac{2}{6} \times \frac{3}{5} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3\times12}{120} \boxed{= 3/10}$;
- $X = 4$ avec 2 jaunes et 1 noire dans n'importe quel ordre et $\boxed{\mathbb{P}(X = 4)} = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3\times12}{120} \boxed{= 3/10}$.

On a donc

k	1	2	3	4	total
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{5}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{9}{30}$	1
$k\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{5}{30}$	$\frac{14}{30}$	$\frac{27}{30}$	$\frac{36}{30}$	$\frac{82}{30}$
$k^2\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{5}{30}$	$\frac{28}{30}$	$\frac{81}{30}$	$\frac{144}{30}$	$\frac{258}{30}$

.

Ainsi, $\mathbb{E}[X] = \frac{82}{30}$, soit $\boxed{\mathbb{E}[X] = \frac{41}{15} \approx 2,73}$ et $\mathbb{E}[X^2] = \frac{258}{30} = \frac{129}{15}$ puis $\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{129}{15} - \frac{41^2}{15^2} = \frac{1935-1681}{225}$, d'où $\boxed{Var(X) = \frac{254}{225}}$.

Exercice 7. $(*)$ (Exercice 4.15 du polycopié)
On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on note X la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer son espérance.
3. On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi de Y et son espérance.

Corrigé :
1. X prend ses valeurs dans $\{1, \ldots, 6\}$. Par hypothèse, il existe un réel a tel que $\mathbb{P}(X = k) = ka$. Maintenant, puisque $\mathbb{P}_X$ est une loi de probabilité, on a $\sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X=k) = 1 = a \sum_{k=1}^{6} k = a \times \frac{6\times 7}{2} = 21a$ donc $a = 1/21$.

On a donc :

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

On vérifie aisément en appliquant la formule

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{6} k\mathbb{P}(X=k)$$

que $\boxed{\mathbb{E}[X] = 13/3 \approx 4,33}$.

2. On a $Y = k$ et de manière équivalente $X = 1/k$. Y prend donc ses valeurs dans

$$\{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6\},$$

et la soi est donnée par :

1/k	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

On a alors $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k}\mathbb{P}(Y=k) = \frac{6}{21}$ soit

$$\boxed{\mathbb{E}[Y] = 2/7 \approx 0,29}.$$

Attention ! Ce n'est pas parce que $Y = 1/X$ que $\mathbb{E}[Y] = 1/\mathbb{E}[X]$! ! !

Exercice 8. $(*)$

1. Une grande enveloppe contient les 12 "figures" d'un jeu de cartes : les 4 rois, les 4 dames et les 4 valets. On tire, simultanément et au hasard, 5 cartes de l'enveloppe. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de rois obtenus.
   Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.
2. Dans la même grande enveloppe contenant les mêmes douze cartes, on effectue successivement 5 fois le tirage d'une carte que l'on remet à chaque fois dans l'enveloppe. Soit Y la variable aléatoire dont la valeur est égale au nombre de rois obtenus au cours des cinq tirages.
   Déterminer la loi de probabilité de Y et calculer son espérance mathématique.

Corrigé :

a) On tire simultanément 5 cartes parmi 12 donc $\mathrm{card}(\Omega) = \binom{12}{5}$. $X(\Omega) = \{0\,;1\,;\,2\,;\,3\,;4\}$ avec :

— $\mathbb{P}(X=0) = \binom{8}{5}/\binom{12}{5} = 7/99$;

— $\mathbb{P}(X=1) = \binom{4}{1} \times \binom{8}{4}/\binom{12}{5} = 35/99$;

— $\mathbb{P}(X=2) = \binom{4}{2} \times \binom{8}{3}/\binom{12}{5} = 42/99$;

— $\mathbb{P}(X=3) = \binom{4}{3}\binom{8}{2}/\binom{12}{5} = 14/99$;

— $\mathbb{P}(X=4) = \binom{4}{4}\binom{8}{1}/\binom{12}{5} = 1/99$;

k	0	1	2	3	4	total
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{7}{99}$	$\frac{35}{99}$	$\frac{42}{99}$	$\frac{14}{99}$	$\frac{1}{99}$	1
$k\mathbb{P}(X=k)$	0	$\frac{35}{99}$	$\frac{84}{99}$	$\frac{42}{99}$	$\frac{4}{99}$	$\frac{165}{99}$

Ainsi $\boxed{\mathbb{E}[X] = \frac{165}{99} = \frac{5}{3}}$.

b) On tire 5 cartes parmi 12 consécutivement avec remise, donc $\mathrm{card}(\Omega) = 12^5$. $Y(\Omega) = \{0\,;1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\}$ avec :

$$\mathbb{P}(Y=k) = \frac{\binom{5}{k} \times 4^k \times 8^{5-k}}{12^5} = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{5-k}$$

c'est-à-dire que $\boxed{Y \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}\left(5\,;\,\frac{1}{3}\right)}$.

Ainsi, $\boxed{\mathbb{E}[Y] = 5 \times \frac{4}{12} = \frac{5}{3}}$.

Exercice 9. $(**)$

On remplit une urne avec des jetons blancs et des jetons noirs. a chaque étape, il y a autant de chance de rajouter dans l'urne un jeton noir qu'un blanc. On s'arrête lorsque l'urne contient 10 jetons.
On note X le nombre de jetons blancs dans l'urne.
Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance $\mathbb{E}[X]$.

Corrigé :

Un résultat est un 10 uplet composé de B et de N.

Pour chaque rang, il y a 2 choix de couleurs de jetons. Donc $\mathrm{card}(\Omega) = 2^{10}$.

Si X désigne le nombre de jetons blancs dans l'urne, on a $X(\Omega) = [\![0\,;\,10]\!]$ et $\mathbb{P}(X=k) = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ donc

$$\boxed{X \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}\left(10\,;\,\frac{1}{2}\right) \text{ et } \mathbb{E}[X] = 5}.$$

Exercice 10. $(**)$

Un jeu vidéo est constitué de n niveaux successifs. Un joueur peut commencer un niveau s'il a réussi le précédent et sa probabilité de réussite est alors $2/3$. Le jeu s'arrête si le joueur échoue à un niveau. Soit X la variable aléatoire retournant le nombre de niveaux réussis par le joueur.

1. Déterminer $\mathbb{P}(X \geq k)$ pour $1 \leq k \leq n$.
   Quelle est la loi de X ?
2. En déduire $\mathbb{E}[X]$.

Corrigé :

a) Si A_i est l'évènement : "le joueur réussit le i-ème niveau", on a $\mathbb{P}(X \geq k) = \bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i$. On a $\mathbb{P}(A_1) = 2/3$ et $\mathbb{P}(A_i | \bigcap\limits_{j=1}^{i-1} A_j) = 2/3$ si $2 \leq j \leq n$.
Avec les probabilités composées, il vient

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{i=2}^{k} \mathbb{P}(A_i | \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j) = \left(\frac{2}{3}\right)^k. \qquad (1)$$

Cette égalité est également vraie si $k = 0$ puisque $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$.

On a $X(\Omega) = \{0, \ldots, n\}$. Si $0 \leq k \leq n-1$, on a $[X \geq k] = [X = k] \cup [X \geq k+1]$ de manière disjointe, donc $\boxed{\mathbb{P}(X = k)} = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1) = \left(\frac{2}{3}\right)^k - \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} \boxed{= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k}$.

Si $k = n$, comme $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ avec $\mathbb{P}(X \geq n+1) = 0$ car il n'y a que n niveaux, on a $\boxed{\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X \geq n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n}$.

b) $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ donne aussi

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{3} \times \frac{1 - (2/3)^n}{1 - 2/3}$$

soit $\boxed{\mathbb{E}[X] = 2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}$.
En effet,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geq k) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} \mathbb{P}(X = i) = \sum_{1 \leq k \leq i \leq n} \mathbb{P}(X = i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{n} i\mathbb{P}(X = i) = \mathbb{E}[X].\end{aligned}$$

Exercice 11. $(* * *)$ (Exercice 4.2 du polycopié)
On dispose de n urnes numérotées de 1 à n, l'urne numérotée k comprenant k boules numérotées de 1 à k. On choisit d'abord une urne, puis une boule dans cette urne, et on note Y la variable aléatoire du numéro obtenu.
Quelle est la loi de Y ? Son espérance ? *Si l'exercice paraît trop compliqué, le faire avec* $n = 4$.

Corrigé :
Notons X la variable aléatoire de l'urne choisie. On a d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y = k | X = i)\mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y = k | X = i)\frac{1}{n}.$$

Or $\mathbb{P}(Y=k|X=i)$ vaut $1/i$ si $k \leqslant i$ et 0 si $k > i$. On en déduit

$$\boxed{\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{ni} = \frac{1}{n} \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i}}.$$

Pour l'espérance, on permute les sommes ($1 \leq k \leq i \leq n$)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} \frac{k}{i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \times \frac{i(i+1)}{2} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{2} = \frac{1}{2n} \times \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 \right) = \frac{n^2+3n}{4}.
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbb{E}[Y] = \frac{n+3}{4}}$.

Exercice 12. $(**)$ (Exercice 4.9 du polycopié)

On jette 3600 fois un dé équilibré.

Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720.

Corrigé :

Soit S la variable aléatoire comptant le nombre d'apparitions du chiffre 1 au cours de ces lancers. S suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3600\ ;\ 1/6)$. On sait donc que $\mathbb{E}[S] = 600$ et $Var(S) = 500$. On a $480 < S < 720$ si et seulement si $-120 < S - 600 < 120$, soit $|S - 600| < 120$.

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}(|S-600| \geqslant 120) \leqslant \frac{500}{120^2} \leqslant 0,035.$$

On en déduit que

$$\boxed{\mathbb{P}(480 < S < 720) \geqslant 1 - 0,035 = 0,965.}$$

En particulier, la probabilité que le numéro 1 apparaisse entre 480 et 720 fois au cours de ces 3600 lancers est supérieur à 0.96.

Exercice 13. $(**)$ (Exercice 3.9 du polycopié)

Un tireur touche une cible une fois sur deux.

1. Combien de fois doit-il tirer, au minimum, pour être sûr, à 99 % au moins, d'atteindre la cible ?
2. Le même tireur vise la cible 20 fois de suite. Quelle est la probabilité qu'il l'atteigne 20 fois ?
3. 720000 tireurs réalisent en même temps l'expérience précédente. Quel est l'événement le plus probable parmi : « Aucun n'atteint 20 fois la cible » et « L'un au moins atteint 20 fois la cible » ?

Corrigé :

a) On cherche n tel que, pour $N \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/2)$, $\mathbb{P}(N \geqslant 1) \geqslant 99\%$. Or

$$\mathbb{P}(N \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(N=0) = 1 - \binom{n}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-0} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N \geqslant 1) \geqslant 99\% \quad &\iff \quad 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \geqslant 0.99 \\
&\iff \quad 1-0.99 \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&\iff \quad 0.01 \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&\iff \quad \ln(0.01) \geqslant n\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -n\ln(2) \\
&\iff \quad -\frac{\ln(0.01)}{\ln(2)} \leqslant n.
\end{aligned}$$

On trouve donc $n \geqslant -\ln(0,01)/\ln(2) \approx 6,6$ ce qui conduit à prendre $\boxed{n \geqslant 7}$.

b) Pour $N \hookrightarrow \mathcal{B}(20, 1/2)$, on cherche $\mathbb{P}(N = 20) = 1/2^{20} = 1/1048576$, soit $\boxed{\mathbb{P}(N = 20) \approx 9,5 \cdot 10^{-7}}$.

c) Pour $M \hookrightarrow \mathcal{B}(720000, 1/2^{20})$, on a :

$$\mathbb{P}(M = 0) = \left(\frac{2^{20}-1}{2^{20}}\right)^{720000} \approx 0,503 > \mathbb{P}(M \geqslant 1).$$

$\boxed{\text{Il est donc plus probable qu'aucun n'atteigne 20 fois la cible}}$.

Exercice 14. $(*)$ (Exercice 4.16 du polycopié)
On lance deux dés parfaitement équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de la variable aléatoire X. Calculer son espérance et sa variance.

Corrigé :
On choisit pour univers $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$ que l'on munit de la probabilité uniforme puisque les deux dés sont équilibrés. Remarquons que le cardinal de Ω vaut 36. Pour déterminer les valeurs de X, on s'aide du tableau suivant :

$i\|j$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Ainsi, on a $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6	total
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1
$k\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{28}{36}$	$\frac{45}{36}$	$\frac{66}{36}$	$\frac{161}{36}$
$k^2\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{45}{36}$	$\frac{112}{36}$	$\frac{225}{36}$	$\frac{396}{36}$	$\frac{791}{36}$

Ainsi, on a $\boxed{\mathbb{E}[X] = \frac{161}{36} \approx 4,47}$ et

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2 = \frac{28476}{1296} - \frac{25921}{1296}$$

soit $\boxed{Var(X) = \frac{2555}{1296} \approx 1,97}$.

Exercice 15. ($**$) (Exercice 4.19 du polycopié)
Une entreprise souhaite recruter un cadre. n personnes se présentent pour le poste. Chacun d'entre elles passe à tour de rôle un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in]0,1[$. On pose également $q = 1 - p$. On définit la variable aléatoire X par $X = k$ si le k-ième candidat qui réussit le test est engagé, et $X = n+1$ si personne n'est engagé.

1. Déterminer la loi de X.
2. En dérivant la formule donnant $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k$, calculer $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ pour $x \neq 1$.
3. En déduire l'espérance de X.
4. Quelle est la valeur minimale de p pour avoir plus d'une chance sur deux de recruter l'un des candidats ?

Corrigé :

a) Notons Ω l'univers associé à l'expérience. On a bien sûr $X(\Omega) = \{1, \ldots, n+1\}$. Pour $i = 1, \ldots, n$, on note A_i l'événement : le i-ème candidat réussit le test. Pour $k \leqslant n$, on a

$$[X = k] = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_{k-1} \cap \bar{A}_k.$$

Par la formule des probabilités composées, on trouve

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\bar{A}_1)\mathbb{P}(\bar{A}_2|\bar{A}_1)\ldots\mathbb{P}(\bar{A}_k|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_{k-1}).$$

Mais pour tout j, $\mathbb{P}(\bar{A}_j|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_{j-1})$ est juste la probabilité que le candidat échoue au test (qu'il ne passe que si les candidats précédents ont tous échoué). Cette probabilité vaut donc $q = 1 - p$. Finalement, on trouve donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X = k) = q^{k-1}p.}$$

D'autre part, $\mathbb{P}(X = n+1)$ est la probabilité que tous les candidats échouent au test. On a donc $\boxed{\mathbb{P}(X = n+1) = q^n}$.

b) Posons $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}/1$. En dérivant des deux côtés de l'égalité, on obtient

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}}.$$

c) On a $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}p + (n+1)q^n$. En tenant compte du résultat de la question précédente, et après simplifications, on trouve

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}.$$

d) Un des candidats est recruté si et seulement si l'événement $[X \leqslant n]$ est réalisé. Il vient

$$\mathbb{P}(X \leqslant n) = 1 - \mathbb{P}(X = n+1) = 1 - q^n.$$

Ainsi, $\mathbb{P}(X \leqslant n) \geqslant 1/2$ équivaut à $q^n \leqslant \frac{1}{2}$, c'est-à-dire

$$\boxed{p \geqslant 1 - \frac{1}{2^{1/n}}.}$$

Exercice 16. $(*)$
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On en tire 2 au hasard sans remise. Soit X la variable aléatoire égale au plus grand numéro tiré.

1. Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ et en déduire la loi de X.
2. Calculer $\mathbb{E}[X]$.

Corrigé :

a) $X(\Omega) = [\![2, n]\!]$.

$[X \leq k]$ signifie que les 2 numéros tirés sont inférieurs ou égaux à k. Ainsi, $\mathbb{P}(X \leq k) = \dfrac{k(k-1)}{n(n-1)}$
et

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1).$$

Ainsi, $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X \leq 2) = \dfrac{2}{n(n-1)}$ et, pour $k \geq 3$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \frac{k(k-1)}{n(n-1)} - \frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)} \\ &= \frac{(k-1)(k-k+2)}{n(n-1)} = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}\end{aligned}$$

(valable aussi pour $k = 2$). On a donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X = k) = \frac{2(k-1)}{n(n-1)} \text{ pour tout } k \in [\![2, n]\!]}.$$

b) $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=2}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{2}{n(n-1)} \sum_{k=2}^{n} k(k-1)$.

Or $\sum_{k=2}^{n} k(k-1) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k$ avec $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
donc

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3} - 1\right) = \frac{n(n+1)}{2}\frac{2n-2}{3}$$

et $\mathbb{E}[X] = \dfrac{2n(n+1)(n-1)}{3n(n-1)}$ soit t $\boxed{\mathbb{E}[X] = \frac{2}{3}(n+1)}$.

Exercice 17. $(**)$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$ et soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. On définit Y par $Y = X$ si $X \neq 0$ et, si $X = 0$, alors Y prend une valeur quelconque dans $[\![0, n]\!]$.
Déterminer la loi de Y et calculer $\mathbb{E}[Y]$.

Corrigé :

On a $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

Si $k \neq 0$, d'après les probabilités totales,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(Y = k | X = i)\mathbb{P}(X = i)$$

avec $\mathbb{P}(Y = k|X = k) = 1$ et $\mathbb{P}(Y = k|X = i) = 0$ si $i \notin \{0, k\}$ et $\mathbb{P}(Y = k|X = 0) = \frac{1}{n+1}$.
Si $k = 0$, $\mathbb{P}(Y = 0|X = i) = 0$ si $i \neq 0$ et $\mathbb{P}(Y = 0|X = 0) = \frac{1}{n+1}$. Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbb{P}(Y=k)=\frac{1}{n+1}\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=k) \text{ si } k\in[\![1,n]\!]\\ \mathbb{P}(Y=0)=\frac{1}{n+1}\mathbb{P}(X=0)\end{array}}.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y=k)=\sum_{k=1}^{n} k\left[\frac{1}{n+1}\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=k)\right]\\ &= \frac{1}{n+1}\mathbb{P}(X=0)\sum_{k=1}^{n} k+\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k)\\ &= \frac{1}{n+1}\mathbb{P}(X=0)\times\frac{n(n+1)}{2}+\mathbb{E}[X]=\frac{n}{2}\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{E}[X]\end{aligned}$$

Or $\mathbb{E}[X]=np$ et $\mathbb{P}(X=0)=(1-p)^n$ donc

$$\boxed{\mathbb{E}[Y]=\frac{n}{2}\left((1-p)^n+2p\right)}.$$

Exercice 18. $(**)$
On lance n fois une pièce. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de « piles » obtenus et soit $Y=\frac{a^X}{2^n}$ où $a\in\mathbb{R}_+$.
Calculer $\mathbb{E}[Y]$.

Corrigé :
X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\frac{1}{2}\right)$: pour $0\leq k\leq n$,

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}.$$

$$\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}\left[\frac{a^X}{2^n}\right]=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} a^k\mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k,$$

soit

$$\boxed{\mathbb{E}(X)=\frac{(a+1)^n}{4^n}}.$$

Exercice 19. $(**)$
Dans une usine, n automobiles arrivent au même instant devant N ateliers de peinture. Chaque véhicule, et de façon indépendante des autres, est dirigé vers un atelier de peinture de manière équiprobable. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'ateliers sans véhicules.
Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}(X)$.

Corrigé :
On pose $X_i=1$ si l'atelier i est vide et $X_i=0$ sinon. Le nombre d'ateliers sans véhicule est donc $X=\sum\limits_{i=1}^{N}X_i$ et $\mathbb{E}[X]=\sum\limits_{i=1}^{N}\mathbb{E}[X_i]=N\mathbb{P}(X_i=1)$ car les X_i ont tous même loi, avec $\mathbb{P}(X_i=1)=\left(\frac{N-1}{N}\right)^n$ donc $\boxed{\mathbb{E}[X]=N\left(1-\frac{1}{N}\right)^n}$.

$X^2=\left(\sum\limits_{i=1}^{N}X_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{N}X_i^2+\sum\limits_{i\neq j}X_iX_j$. Or $X_i^2=X_i$ (0 ou 1) et X_iX_j suit également une loi de Bernoulli avec $\mathbb{P}(X_iX_j=1)=\mathbb{P}(\{X_i=1\}\cap\{X_j=1\})=\left(\frac{N-2}{N}\right)^n=\left(1-\frac{2}{N}\right)^n$. On a alors $\mathbb{E}[X^2]=N\left(1-\frac{1}{N}\right)^n+(N^2-N)\left(1-\frac{2}{N}\right)^n$ et $\mathbb{E}[X]^2=N^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2n}$ donc

$$\boxed{Var(X) = N\left(1-\frac{1}{N}\right)^n + (N^2-N)\left(1-\frac{2}{N}\right)^n - N^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2n}}.$$

Exercice 20. $(***)$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ telle que

$$P(X = k) = \lambda \frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \lambda \frac{C_n^k}{k+1} \text{ pour } k \in [\![0, n]\!]$$

Déterminer λ puis calculer $\mathbb{E}[X]$.

Corrigé :

Par définition, on a $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = 1$, donc $\frac{1}{\lambda} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{C_n^k}{k+1}$.

On sait que si $f(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k$, alors on a $f(t) = (1+t)^n$.

Par intégration, on obtient $\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$,

d'où $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$,

et finalement $\boxed{\lambda = \frac{n+1}{2^{n+1}-1}}$.

Par définition, on a $\mathbb{E}[X] =_{k=0}^{n} kP(X = k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} k \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$.

En utilisant $\frac{k}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}$, il vient

$$\mathbb{E}[X] = \lambda \sum_{k=0}^{n} C_n^k - \lambda \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \lambda 2^n - 1$$

.

On en déduit finalement $\boxed{\text{E[X]=} \dfrac{2^n(n-1)+1}{2^{n+1}-1}}$.