Enseignant : H. El-Otmany **A.U.** : 2014-2015

Soient Z et z deux nombres complexes sous forme exponentielle tels que $Z = Re^{i\theta}$ et $z = re^{i\alpha}$.
Problème : Il s'agit de trouver $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = Z$; c'est-à-dire résoudre l'équation complexe $z^n = Z$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On trouve alors :

$$z^n = Z \Longleftrightarrow r^n e^{in\alpha} = Re^{i\theta} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} r^n & = & R \\ n\alpha & \equiv & \theta[2\pi] \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} r & = & R^{1/n} \\ \alpha & \equiv & \frac{\theta}{n}[\frac{2\pi}{n}], \end{array} \right.$$

d'où les solutions suivantes : $\forall k \in \{0, 1, \cdots, n-1\},\ z_k = R^{1/n} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$.

Exercice n°1 Calculer les racines carrées des nombres ci-dessous :

$$z_1 = \sqrt{3} + i; \quad z_2 = 1 + i; \quad z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}; \quad z_4 = 3 + 4i; \quad z_5 = 8 - 6i; \quad z_6 = 7 - 24i$$

Exercice n°2 Calculer le module et l'argument de $u = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1 - i$. En déduire le module et l'argument de $w = \frac{u}{v}$.

Exercice n°3 Mettre sous la forme algébrique $a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ les nombres complexes suivants :

(a) $z_1 = \dfrac{4 + 8i}{3 - 4i}$ (b) $z_2 = \left(\dfrac{1 + i}{2 - i}\right)^2$

(c) $z_3 = \dfrac{3 + 2i}{2 - 2i}$ (d) $z_4 = \dfrac{3 + 2i}{2 - 2i} + \dfrac{3 - 2i}{2 + 2i}$

(e) $z_5 = \dfrac{3}{2 + \sqrt{3}i}$ (f) $z_6 = \dfrac{1}{(1 - 2i)(3 + \sqrt{2}i)}$

Exercice n°4 Mettre sous la forme trigonométrique les nombres complexes suivants, ainsi que leur conjugués :

(a) $z_1 = 3 + 2i$ (b) $z_2 = 1 + 2i$

(c) $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$ (d) $z_4 = -\frac{4}{3}i$

(e) $z_5 = -2$ (f) $z_6 = 1 + i\sqrt{3}i$

Exercice n°5

1. Calculer les racines carrées de $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
2. Calculer les valeurs de $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice n°6 Calculer la somme $S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$.

Exercice n°7 Résoudre les équations complexes suivantes :

(a) $z^3 = \sqrt{3} + i$ (b) $z^4 = 1 + i$

(c) $z^3 = 11 + 2i$ (d) $z^6 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$

(e) $z^3 = 2 - 2i$ (f) $z^5 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

Exercice n°8 Factoriser dans $\mathbb{C}$ les polynômes suivants :

(a) $P(z) = z^2 - \sqrt{3} - i$ (b) $P(z) = z^3 - 3 - 4i$

(c) $P(z) = z^4 + 1$ (d) $P(z) = z^5 - 1$

(e) $z^3 = 2 - 2i$ (f) $z^5 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

Exercice n°9 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

1. $|\frac{z-2}{z-3}| = 1$
2. $|\frac{z-2}{z-3}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $|\frac{z-3}{z-5}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice n°10 Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

1. $3z^2 - 5z + 8 = 0$
2. $z^2 - 2z + 3 = 0$
3. $z^2 + 3\overline{z} + 1 = 0$

Exercice n°11 On considère un réel α. Développer $(z^2+\alpha z+4)(z^2-\alpha z+4)$. En déduire les solutions complexes de l'équation $z^4 + 16 = 0$.

Exercice n°12 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - (1-i)z^2 + (1-i)z + i = 0$.

1. Montrer que (E) possède une unique solution imaginaire pure.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).