L1-MIASH/Biologie - ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE

——-

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 3

Division euclidienne - PGCD - racines

Enseignant : H. El-Otmany **A.U.** : 2014-2015

Exercice n°1 Pour chacun des polynômes suivants, dresser la liste complète des polynômes le divisant dans l'anneau de polynômes précisé :

(1) $X+1$ dans $\mathbb{R}[X]$ (2) X^2-1 dans $\mathbb{R}[X]$ (3) X^2+1 dans $\mathbb{C}[X]$
(4) X^2+1 dans $\mathbb{R}[X]$ (5) $2X+4$ dans $\mathbb{Q}[X]$ (6) $2X+4$ dans $\mathbb{Z}[X]$

Exercice n°2 Effectuer la division euclidienne de la fonction polynôme A par la fonction polynôme B dans les cas suivants :

1. $A(X) = X^3+X^2+X+1$ et $B(X) = X^2+1$,
2. $A(X) = X^4-X$ et $B(X) = 2X+1$,
3. $A(X) = X^4+1$ et $B(X) = X^2+\sqrt{2}X+1$,
4. $A(X) = X^3+2X+1$ et $B(X) = X+i$,
5. $A(X) = X^3+2X+1$ et $B(X) = 7X^2-1$,
6. $A(X) = 4X^5-2X^3+X-1$ et $B(X) = -2X^2-1$,
7. $A(X) = 2X^2+3X-5$ et $B(X) = \sqrt{3}X+5$,
8. $A(X) = -3X^6+X^4-5X^2+1$ et $B(X) = 3X^2+X+1$,

Exercice n°3

1. Effectuer la division euclidienne de $A(X) = 2X^2+X+5$ par $X-\frac{3}{2}$
2. En déduire la division euclidienne de $A(X)$ par $\frac{3}{2}-X$, par $2X-3$, par $3-2X$ et par $4X-6$
3. En déduire aussi la division de $B(X) = 6X^2+3X+15$ par $X-\frac{3}{2}$, par $\frac{3}{2}-X$, par $2X-3$, par $3-2X$ et par $4X-6$.

Exercice n°4 Calculer le quotient et le reste de chacune des divisions suivantes de A par B

1. $A(X) = X^3+2X^2+3$ et $B(X) = X^2-X-1$,
2. $A(X) = X^3-4X+5$ et $B(X) = X^2-3X+2$,
3. $A(X) = X^4-X$ et $B(X) = 2X+1$,
4. $A(X) = X^3+X^2+X+1$ et $B(X) = iX^2+1$,
5. $A(X) = X^3+X^2+X+1$ et $B(X) = 3iX^2+1$,
6. $A(X) = X^3+X^2+X+1$ et $B(X) = \frac{1}{4}X^2-4i+2$,
7. $A(X) = 7X^6-X^4-5X^2+3i$ et $B(X) = X^2+iX+3$,

Exercice n°5 Soit $n \geqslant 1$ un entier.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^{5n} par X^5-1.
2. En déduire le reste de la division euclidienne de $X^{99}+2X^{42}-3X^{35}-2X^{27}+3$ par X^5-1.

Exercice n°6 A l'aide de l'algorithme d'Euclide déterminer le PGCD dans $\mathbb{R}[X]$ des polynômes $A = X^4 + 2X^3 - X - 2$ et $B = X^5 - 5X^3 - 9X^2 - 8X - 3$ et en déduire des polynômes U et V tels que

$$AU + BV = \mathrm{PGCD}(A, B).$$

Exercice n°7 Déterminer le PGCD de $P = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ et $Q = X^4 - 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice n°8 Montrer que le polynôme $X^{163} + 24X^{57} - 6$ a au moins une racine sur $\mathbb{R}$. A-t-il des racines dans $\mathbb{Q}$? Même exercice avec le polynôme $X^7 + 3X^2 + 2$.

Exercice n°9 Soient α, β et γ les racines complexes du polynôme $P = X^3 + 3X^2 + X + 1$.

1. Écrire les relations reliant les racines et les coefficients de P.
2. Quelle est la valeur de $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + 3\alpha\beta$?

Exercice n°10 Trouver les racines de polynôme $P = X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 15X + 18$ sachant que le produit de deux d'entre elles vaut 6.

Exercice n°11 Soient α, β et γ les racines de l'équation $P = X^3 - 5X^2 + 6X - 1$. Déterminer la valeur exacte de

$$A = \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{1-\gamma}.$$

Exercice n°12 On désire résoudre le système (S) :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = 0 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha & = 3 \\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 & = -12 \end{cases} \quad , \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3.$$

1. On pose $P(X) = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$, développer P.
2. Déterminer alors les racines de P et en déduire les solutions de (S).