L1-MIASH/Biologie - ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 4

Décomposition en éléments simples - Bases orthonormales

Enseignant : H. El-Otmany **A.U.** : 2014-2015

Exercice n°1 Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}[X]$ les fractions suivantes :

(1) $\dfrac{X^2+3}{X^2-1}$ (2) $\dfrac{6}{X(X-1)(X+1)}$ (3) $\dfrac{3}{X^3-1}$

(4) $\dfrac{6X-11}{(X-1)^2}$ (5) $\dfrac{-17X^2+70X-21}{X^2(3X-7)}$ (6) $\dfrac{X}{X^2-5}$

(7) $\dfrac{1}{X(X^2+1)^2}$ (8) $\dfrac{X^2}{(X^2+5)^{92015}}$ (9) $\dfrac{1}{(X^2-1)(X+1)^2}$

(10) $\dfrac{X^2+X}{X^3(X-2)}$ (11) $\dfrac{X^2-2X-3}{X^3+2X^2-3X}$ (12) $\dfrac{X^7+1}{(X^2+1)^2(X^2+X+1)}$

Exercice n°2 Effectuer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ des fractions rationnelles suivantes :

1) $\dfrac{X+3}{X^2+1}$ 2) $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$ 3) $\dfrac{5}{(X^2+1)^2}$

4) $\dfrac{2}{X^4+X^2+1}$ 5) $\dfrac{2X}{X^2+1}$ 6) $\dfrac{X+i}{X^2+2i}$

7) $\dfrac{1}{X(X^2+1)^2}$ 8) $\dfrac{X-3i+1}{X^2+iX+2}$ 9) $\dfrac{X+1}{X^4+1}$

10) $\dfrac{X^7+1}{(X^2+1)(X^2+X+1)}$ 11) $\dfrac{X^5}{(X^4-1)^2}$ 12) $\dfrac{X}{(X^2+1)(X^2-j^2)^2}$

Exercice n°3 Si $U, V \in \mathbb{R}[X]$ avec $V(0) \neq 0$ et si $m \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ tel que : $U = VQ + X^{m+1}R$ et $\deg(Q) \leqslant m$. Illustrer la situation dans les deux cas :

1. $U = 1 - X$, $V = 1 + X^2$, $m = 4$.
2. $U = 1 + X - X^2 + X^3$, $V = 1 - X$, $m = 3$.

Exercice n°4

1. Soit $F = \dfrac{N}{D}$. Si $z \in \mathbb{C}[X]$ est une racine simple de D, montrer que le coefficient de l'élément simple $\dfrac{1}{X-z}$ est $\dfrac{N(z)}{D'(z)}$.
2. Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction définie par :

$$F = \frac{X}{X^n - 1}.$$

Exercice n°5 Soit F la fraction rationnelle définie par :

$$F = \frac{X^2+X-1}{X^4+X+1}.$$

1. Décomposer en éléments simple sur $\mathbb{R}[X]$
2. On note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^2+k-1}{k^4+k+1}$.
   i. Calculer $S_1,\ S_2$ et S_3.
   ii. Donner l'expression de S_n en fonction de n et en déduire $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} S_n$.

Exercice n°6 Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}[X]$ la fraction rationnelle suivante :

$$F(X) = \frac{X^4+1}{X^2\left(X^2+X+1\right)^2}.$$

Exercice n°7 Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, on pose :

$$V_1 = (1, 2, -1, 1), \quad V_2 = (0, 3, 1, -1).$$

On pose $F = \mathrm{Vect}(V1, V2)$. Déterminer une base orthonormale de F et un système d'équations de $F^{\perp}$.

Exercice n°8 Soit E un espace pré-hilbertien réel et $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille de n vecteurs unitaires de $E(n \in \mathbb{N}^*)$ telle que pour tout vecteur x de E, on ait

$$||x||^2 = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2.$$

Montrer que la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice n°9 Soit f une fonction continue sur $[0,\ 1]$, non nulle à valeurs réelles positives. Pour P et Q polynômes donnés, on pose $\Phi(P, Q) = \int\limits_0^1 f(t)P(t)Q(t)dt$.

1. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer qu'il existe une base orthonormale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour Φ telle que, pour tout entier naturel n, $\deg(P_n) = n$.
3. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle base. Montrer que chaque polynôme P_n, $n \in \mathbb{N}^*$, admet n racines réelles simples.