L1-MIASH - ALGÈBRE LINÉAIRE I

——–

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 2

Espaces vectoriels

Enseignant : H. El-Otmany **A.U.** : 2013-2014

Exercice n°1 On définit sur $E = \mathbb{R}^2$:

1. l'addition $\oplus$ par
$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y').$$
2. la multiplication externe $\odot$, ayant $\mathbb{R}$ comme corps des scalaires, par
$$\lambda \odot (x, y) = (2x, 0).$$

E muni de ces deux lois est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Exercice n°2 Pour x et y alors $\mathbb{R}_+^*$ et λ réel, on pose
$$x \oplus y = xy \text{ et } \lambda \odot x = x^\lambda.$$

Montrer que $(R_+^*, \oplus, \odot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice n°3 Étudier la dépendance linéaire des vecteurs de $\mathbb{R}2$ suivants :

1. $v_1 = (2, -3)$, $v_2 = (-1, 1)$.
2. $v_1 = (-3, 1)$, $v_2 = (3, -1)$.
3. $v_1 = (6, -4)$, $v_2 = (12, -8)$.

Exercice n°4 Les familles de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ou liées ?

1. $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, -1)$.
2. $u_1(1, 0, -1)$, $u_2 = (-1, 1, 0)$, $u_3 = (0, -1, 1)$.
3. $u_(1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 0, 1)$, $u_4 = (-1, 1, 1)$.
4. $u_(2, 1, 1)$, $u_2 = (3, 1, -3)$, $u_3 = (-1, 2, 1)$.
5. $u_(9, -18, 27)$, $u_2 = (2, -4, 6)$.

Les familles données ci-dessus sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^3$? Lorsque que la réponse est négative on déterminera le sous-espace engendré et sa nature géométrique.

Exercice n°5

1. Montrer que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R}$ est-il un sous-espace du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$?
3. Même question pour $\{\lambda(a + bi) | \lambda \in \mathbb{R}\}$ où $a + bi \in \mathbb{C}$ est fixé.

Exercice n°6 Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

1. Montrer que E est engendré
   — par les vecteurs 1 et i.

— par les vecteurs 1 et j.

2. Déterminer des systèmes générateurs de E_2 et E_3.
3. Que peut-on dire si l'on considère $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$?

Exercice n°7 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Démontrer : $F \cup G$ est un s.e.v. de $E \Longleftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$.
2. En déduire que si $F \neq E$ et $G \neq E$, alors $F \cup G \neq E$.

Exercice n°8 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 4z = 0\}$.
2. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$.
3. $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy - z = 0\}$.
4. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0 \text{ et } z - x = 0\}$.
5. $E = \{(x, y, x) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.
6. $F_\alpha = \{(x + \alpha, -x, x + z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$ avec α fixé.

Déterminer (s'il y a lieu) des systèmes générateurs, décider si le sous-espace est une droite ou un plan de $\mathbb{R}^3$, donner les équations paramétriques et cartésiennes.

Exercice n°9

1. Soit E le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs : $u = (-1, -2, 1, 1)$ et $v = (-4, -6, 0, 2)$. Calculer la dimension de E.
2. Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ formé des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) tels que $x_1 - \dfrac{1}{3}x_3 = 0$ et $-x1 - x3 + x4 = 0$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
3. Calculer les dimensions de $E \cap F$ et du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, $E + F$, engendré par $E \cup F$.

Exercice n°10 Dans $\mathbb{R}^4$, comparer les sous-espaces F et G suivants :

$$F = \mathrm{Vect}\{(1, 0, 1, 1), (-1, -2, 3, -1), (-5, -3, 1, -5)\}; \quad G = \mathrm{Vect}\{(-1, -1, 1, -1), (4, 1, 2, 4)\}.$$

Exercice n°11 Soient $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (2, -2, -1)$ et $u_3 = (1, 1, -1)$.
Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ y + z = 0\}$ et $F = \mathrm{Vect}\{u_1,\ u_2\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de E.
2. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ? Est-ce que $u_3 \in F$?
3. Est-ce que $u_3 \in E$?
4. Donner une base de $E \cap F$.
5. Soit $u_4 = (-1, 7, 5)$, est-ce que $u_4 \in E$? est-ce que $u_4 \in F$?

Exercice n°12 Soit E l'espace vectoriel des suites de nombres réels et $\mathcal{E} \subset E$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que les suites de terme général $a_n = (-1)^n$ et $b_n = 2^n$ forment une famille libre de $\mathcal{E}$.
3. Tenant compte du fait qu'une suite (u_n) est entièrement déterminée par la donnée de u_0 et u_1, montrer que (a_n) et (b_n) forment une base de $\mathcal{E}$.
4. Déterminer les suites (u_n) de $\mathcal{E}$ telles que $u_0 = 1$ et $u_1 = -2$.

Exercice n°13 Soient $E = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ avec $u_1 = (4, -2, -2)$; $u_2 = (-3, 6, 9)$; $u_3 = (1, 4, 7)$; $u_4 = (-1, -1, -2)$

1. Est-ce que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Montrer que (u_1, u_2) est une base de E.
3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant E.
4. Compléter une base de E en une base de $\mathbb{R}^3$

Exercice n°14 Soit $E = \{P(X) \in \mathbb{R}_3[X],\ P(-1) = 0, P(1) = 0\}$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base et la dimension de E.

Exercice n°15 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{R})$ des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, montrer que les familles suivantes sont libres :

1. $\{x,\ e^x\}$
2. $\{e^x,\ e^{2x}\}$
3. $\{x,\ \sin(x)\}$
4. $\{\sin(x),\ \cos(x)\}$

Exercice n°16 Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ;\ x+y+z+t = 0, x+2y-z+t = 0, -x-y+2z+2t = 0\}$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ;\ x + 3y + 4t = 0\}$.

1. Donner une base de ces deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^4$?
3. Soit $a = (1, 3, 0, 4) \in \mathbb{R}^4$ et on pose $G = \text{Vect}\{a\}$, a-t-on $G \oplus F = \mathbb{R}^4$?

Exercice n°17 Soient $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ;\ x + z = 0, y + t = 0, \}$ et $F = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$ tel que $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1, -1)$ et $u_3 = (1, 0, 1, 0)$.

On admettra que E est un espace vectoriel.

1. Donner une base de E et en déduire sa dimension.
2. Déterminer une base de F.
3. Donner une (ou plusieurs) équation(s) qui caractérise(nt) F.
4. Donner une famille génératrice de $E + F$.
5. Montrer que : $E \oplus F = \mathbb{R}^4$