FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 3

Applications linéaires

Enseignant : H. El-Otmany

A.U. : 2013-2014

Exercice n°1 En utilisant la définition de l'application linéaire, étudier le caractère linéaire ou non des applications suivantes, $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^3 \longleftrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

1. $f(x,y) = xy$
2. $f(x,y) = x - 2y$
3. $f(x,y) = x + y - 2$
4. $g(x,y,z) = x + 3y - z$
5. $g(x,y,z) = x + 3y - z$
6. $g(x,y,z) = 2x - z - \sqrt{2}$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

1. $f(x,y) = (2x + y, 0)$
2. $f(x,y) = (1, x^2 + y^2)$
3. $f(x,y) = (2x^3, x^2 + y^2)$
4. $f(x,y) = (x - 3, 2x - y)$
5. $f(x,y) = (\max(x,y), \min(x,y))$
6. $f(x,y) = (x - y, x + 2yy)$

(c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

1. $f(x,y,z) = (3x, 2y, 3z - 2x)$
2. $f(x,y,z) = (2x + 3, y, z - x)$
3. $f(x,y,z) = (x + 2z, y - x, z + 2x - y)$
4. $f(x,y,z) = (3x, y - 2, 0)$
5. $f(x,y,z) = (x^2 + y, z - y, x - z)$
6. $f(x,y,z) = (x + y, 0, x + y + 2z)$

(d) $\phi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, $\Phi : \mathcal{A}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\tau : \mathcal{A}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$\phi(x,y) = x + iy \qquad \Phi(f) = f(0) \qquad \tau(f) = \int_{-1}^{1} f(s)ds$$

Exercice n°2 Dans cet exercice, on ne considère que les applications qui sont linéaires de l'exercice précédent.

1. Déterminer le noyau et l'image de chaque application linéaire. Ces applications linéaires sont-elle injectives ? surjectives ? bijectives ?

Exercice n°3 Soit $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels ou complexes et d'inconnue X. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère le sous-espace vectoriel $\mathbb{K}^n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] | \deg p?n\}$.

1. Est-ce que les applications ci-dessous sont-elles linéaires ?
   (a) $f_1 : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ telle que $f_1(P) = P'$.
   (b) $f_2 : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ telle que $f_2(P) = P - (X-2)P'$.
   (c) $f_3 : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $f_3(P) = (P(-1), P(0), P(1))$.
   (d) $f_4 : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ telle que $f_4(P) = P'$.
   (e) $f_5 : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ telle que $f_5(P) = P - XP$.
   (f) $f_6 : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f_6(P) = (P(0), P'(1))$.
   (g) $f_7 : \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C}[X]$ telle que $f_7(P) = (1 - pX)P + X^2P', p \geqslant 0$.

2. Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires f_i. Lesquelles des applications f_i qui sont injectives, surjectives et bijectives ?

Exercice n°4 On pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + 2y - z = 0\}$; $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y = 0 \text{ et } y - z = 0\}$; $H = \{(x + y, 2x - y, x - 3y), x, y \in \mathbb{R}\}$.

1. Exprimer
   — F comme le noyau d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$.
   — G comme le noyau d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$.
   — H comme l'image d'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$.
2. En déduire que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de chacun d'eux.

Exercice n°5 Soient E et F deux K-espaces vectoriels et f et g deux applications K-linéaires de E vers F. On note $H = \{x \in E \,:\, f(x) = g(x)\}$.

1. Exprimer H comme le noyau d'une application linéaire.
2. Déduire que H est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice n°6 On considère l'application $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y, z, t) = (x - t, y - z - t)$

1. Justifiez que f est linéaire. Peut-elle être bijective ?
2. Déterminer une base du noyau.
3. Quel est le rang de f et en déduire $Im(f)$.
4. A-t-on $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}4$?

Exercice n°7

1. Déterminer les noyaux des endomorphismes suivants de $\mathbb{R}^3$: $f \,:\, (x, y, z) \longmapsto (x, -y, 2z)$ et $g : (x, y, z) \longmapsto (y, -x, -z)$.
2. Parmi les endomorphismes f, g, $f + g$, certains sont-ils des automorphismes ?

Exercice n°8 Soit $f \,:\, E \longrightarrow E$ une application linéaire et λ un réel.

1. Calculer $f(x)$ pour $x \in E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda id_E)$.
2. Montrer que est un sous-espace vectoriel de E.
3. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E, montrer que $f(F)$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. Si $\lambda \neq 0$, montrer que $f(E_\lambda) = E_\lambda$.

Exercice n°9 Soit f un endomorphisme de E, un espace vectoriel. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$.
(ii) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f \circ f)$.

Exercice n°10 Soient $f, g \,:\, E \longrightarrow F$ deux applications linéaires. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Ker}(f + g)$ et que l'inclusion peut être stricte.

On suppose maintenant que F est de dimension finie. Montrer que $rang(f + g) \leqslant rg(f) + rg(g)$. Montrer sur un exemple que l'inégalité peut être stricte.