L1-MIASH - ALGÈBRE LINÉAIRE I

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 4

Applications linéaires - Matrices

Enseignant : H. El-Otmany

A.U. : 2013-2014

Exercice n°1 En utilisant la définition de l'application linéaire, étudier le caractère linéaire ou non des applications suivantes, $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^3 \longleftrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

1. $f(x, y) = xy$
2. $f(x, y) = x - 2y$
3. $f(x, y) = x + y - 2$
4. $g(x, y, z) = x + 3y - z$
5. $g(x, y, z) = x + 3y - z$
6. $g(x, y, z) = 2x - z - \sqrt{2}$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

1. $f(x, y) = (2x + y, 0)$
2. $f(x, y) = (1, x^2 + y^2)$
3. $f(x, y) = (2x^3, x^2 + y^2)$
4. $f(x, y) = (x - 3, 2x - y)$
5. $f(x, y) = (\max(x, y), \min(x, y))$
6. $f(x, y) = (x - y, x + 2yy)$

(c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

1. $f(x, y, z) = (3x, 2y, 3z - 2x)$
2. $f(x, y, z) = (2x + 3, y, z - x)$
3. $f(x, y, z) = (x + 2z, y - x, z + 2x - y)$
4. $f(x, y, z) = (3x, y - 2, 0)$
5. $f(x, y, z) = (x^2 + y, z - y, x - z)$
6. $f(x, y, z) = (x + y, 0, x + y + 2z)$

(d) $\phi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, $\Phi : \mathcal{A}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\tau : \mathcal{A}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$\phi(x, y) = x + iy \qquad \Phi(f) = f(0) \qquad \tau(f) = \int_{-1}^{1} f(s)ds$$

Exercice n°2 Dans cet exercice, on ne considère que les applications qui sont linéaires de l'exercice précédent.

1. Déterminer le noyau et l'image de chaque application linéaire. Ces applications linéaires sont-elle injectives ? surjectives ? bijectives ?

Exercice n°3 Soit $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels ou complexes et d'inconnue X. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère le sous-espace vectoriel $\mathbb{K}^n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] | \deg p?n\}$.

1. Est-ce que les applications ci-dessous sont-elles linéaires ?
   (a) $f_1 : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ telle que $f_1(P) = P'$.
   (b) $f_2 : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ telle que $f_2(P) = P - (X - 2)P'$.
   (c) $f_3 : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $f_3(P) = (P(-1), P(0), P(1))$.
   (d) $f_4 : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ telle que $f_4(P) = P'$.
   (e) $f_5 : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ telle que $f_5(P) = P - XP$.
   (f) $f_6 : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f_6(P) = (P(0), P'(1))$.
   (g) $f_7 : \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C}[X]$ telle que $f_7(P) = (1 - pX)P + X^2P'$, $p \geqslant 0$.

2. Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires f_i. Lesquelles des applications f_i qui sont injectives, surjectives et bijectives ?

Exercice n°4 On pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x + 2y - z = 0\}$; $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x + y = 0 \text{ et } y - z = 0\}$; $H = \{(x + y, 2x - y, x - 3y), x, y \in \mathbb{R}\}$.

1. Exprimer
   — F comme le noyau d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$.
   — G comme le noyau d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$.
   — H comme l'image d'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$.
2. En déduire que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de chacun d'eux.

Exercice n°5 Soient E et F deux K-espaces vectoriels et f et g deux applications K-linéaires de E vers F. On note $H = \{x \in E \;:\; f(x) = g(x)\}$.

1. Exprimer H comme le noyau d'une application linéaire.
2. Déduire que H est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice n°6 Soient $f, g \;:\; E \longrightarrow F$ deux applications linéaires. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Ker}(f + g)$ et que l'inclusion peut être stricte.

On suppose maintenant que F est de dimension finie. Montrer que $rang(f+g) \leqslant rang(f)+rang(g)$. Montrer sur un exemple que l'inégalité peut être stricte.

Exercice n°7 On considère l'application $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y, z, t) = (x - t, y - z - t)$

1. Justifiez que f est linéaire. Peut-elle être bijective ?
2. Déterminer une base du noyau.
3. Quel est le rang de f et en déduire $Im(f)$.

Exercice n°8

1. Déterminer les noyaux des endomorphismes suivants de $\mathbb{R}^3$: $f \;:\; (x, y, z) \longmapsto (x, -y, 2z)$ et $g : (x, y, z) \longmapsto (y, -x, -z)$.
2. Parmi les endomorphismes f, g, $f + g$, certains sont-ils des automorphismes ?

Exercice n°9 Soit E un espace vectoriel et I l'endomorphisme identique de E. On appelle projecteur de E tout endomorphisme p de E tel que $p^2 = p$.

1. Démontrer l'équivalence des propositions suivantes où p est un endomorphisme de E :
   (i) p est un projecteur.
   (ii) $I - p$ est un projecteur.
   (iii) $p(I - p) = (I - p)p = 0$.
2. Montrer que si p est un projecteur, $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$. Bien choisir une base de E et écrire la matrice de p dans cette base.
3. On considère l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}^2$ défini par :

$$f((x, y)) = (x - y, y - x), \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

   Déterminer l'image et le noyau de f. f est-il un projecteur ?

Exercice n°10 On note $E = \mathbb{R}^2[X]$, étant donné $P \in E$, on pose $\Phi(P) = XP' - 3P$.

1. Montrer que Phi définit un endomorphisme de E.
2. Soit $aX^2 + bX + c = P \in E$; déterminer les coordonnées de P dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de E.
3. Déterminer le noyau et l'image de Φ et donner une base de chacun de ces sous-espaces. Quel est le rang de Φ ?
4. Donner la matrice de Φ dans la base canonique de E.

Exercice n°11 Soit

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y + z \\ -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z \\ \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique B de $\mathbb{R}^3$.
2. On pose $u_1 = (-1, 0, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 0, 0)$. Montrer que $B' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$. En déduire sans plus de calcul la matrice de f dans la base B'.
4. Déterminer la matrice de passage de B à B' ainsi que son inverse.

Exercice n°12 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui admet dans la base canonique la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base de noyau de f.
2. Déterminer une base de l'image de f. Quel est le rang de A.
3. Trouver une base où la matrice de f soit :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Calculer B^n et en déduire A^n.

Exercice n°13 Déterminer le rang de la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$