Exercice n°1

1. Ecrire la formule du déterminant pour une matrice 4x4. Combien y a-t-il de termes dans cette formule ?
2. Soient σ_1, σ_2 les permutations sur 4 éléments suivantes

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Entourer en bleu les termes de la matrice correspondant à la permutation σ_1 et en rouge ceux correspondant à la permutation σ_2. Les calculer. Avec quel signe ces termes apparaissent-ils ?

Exercice n°2 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos x & \cos y & \cos z \\ \cos 2x & \cos 2y & \cos 2z \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos x & \cos y & \cos z & \cos t \\ \cos 2x & \cos 2y & \cos 2z & \cos 2t \\ \cos 3x & \cos 3y & \cos 3z & \cos 3t \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & & n \\ -1 & -2 & 0 & & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice n°3 Déterminer pour quelles valeurs de t, la matrice suivante est inversible et calculer son inverse.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Exercice n°4 Les nombres 119, 153 et 289 sont tous divisibles par 17. Montrer, sans le développer que le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ est divisible par 17.

Exercice n°5 Mettre sous forme bien échelonnée la matrice suivante.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice n°6 On considère la matrice suivante à coefficients dans $\mathbb{Q}$ et

$$M(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & 2t^2 & 4 \\ 2 & -2t & 0 & 3 \\ 3 & 3t & 4t+2 & 2 \\ 4 & 1 & 3t+2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Montrer que $M(1)$ n'est pas inversible. Déterminer pour quelles valeurs de t la matrice $M(t)$ est inversible.

Exercice n°7 Calculer l'inverse des matrices suivantes

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

en utilisant

1. la méthode de Gauss
2. la matrice échelonnée
3. la matrice des cofacteurs (comatrice).

Exercice n°8 Déterminer par la méthode de Gauss le rang de la matrice A définie par

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 7 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice n°9 Calculer par déterminants le rang des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 7 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice n°10 Calculer le rang de la matrice A suivant le paramètre $m \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -m \\ 0 & 0 & m & m-2 \\ 0 & 1 & -1 & 1-m \end{pmatrix}$$

Exercice n°11 Calculer les inverses des matrices suivantes, quand elles sont inversibles :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ -1 & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & -1 \end{pmatrix}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2; \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & m & -1 \end{pmatrix}, m \in \mathbb{R}$$

Exercice n°12 Pour m dans $\mathbb{C}$, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A_2, A_3, A_4.
2. En déduire $(I_4 - A)^n$.
3. Calculer $(I_4 - A)^{-1}$ et $(I_4 - A)^{-n}$.

Exercice n°13 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui admet dans la base canonique la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base de noyau de f.
2. Déterminer une base de l'image de f. Quel est le rang de A.
3. Trouver une base où la matrice de f soit :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice n°14 Soient E l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3 et f l'endomorphisme de E qui à un polynôme associe son polynôme dérivé.

1. Écrire la matrice C de f dans la base canonique $\mathcal{C}$ de E.
2. Écrire la matrice B de f dans la base $\mathcal{B} = (1, 1 + X, 1 + X^2, 1 + X^3)$.
3. Écrire la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$ et vérifier $P_{\mathcal{BC}}P_{\mathcal{C}^{\mathcal{B}}} = I_E$.

Exercice n°15 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $M_{\mathcal{C}}(f)$ dans la base canonique :

$$M_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1, -4$ et $v_2 = (1, -1)$.
2. Calculer la matrice de passage $P_{\mathcal{BC}}$ de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$? Calculer $P^{-1} = P_{\mathcal{CB}}$.
3. En déduire la matrice $M_{\mathcal{C}}^n(f)$ et les composantes a_n et b_n dans la base canonique du vecteur transformé de $(1; 0)$ par f^n.

Exercice n°16 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à la base B est

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On définit $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ où $v1 = u_1 + u_2 + u_3$, $v_2 = u_1 - u_2$, $v_3 = u_1 + u_3$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E.
2. Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
3. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Im} f$.