L1-MIASH - ALGÈBRE LINÉAIRE I

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 5

Systèmes d'équations linéaires

Enseignant : H. El-Otmany — **A.U.** : 2013-2014

Exercice n°1 Vérifier que $u_1 = (-3, 0, -1)$ et $u_2 = (0, -1, 0)$ sont solutions du système linéaire :

$$(S)\left\{\begin{aligned} x + 2y - z &= -2\\ -2x - y + 5z &= 1\\ 3x + 5y - 4z &= -5 \end{aligned}\right.$$

Sans aucun calcul, déterminer l'ensemble des solutions de (S).

Exercice n°2

Soit f l'endomorphisme de R^3 dont la matrice par rapport à la base canonique de R^3 est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$$

Pour quelles valeurs de m, f est-il bijectif ? Pour les autres valeurs de m, déterminer le noyau de f. En déduire les solutions des

$$(S_1)\left\{\begin{aligned} x + z &= 1\\ x + y &= 1\\ y + mz &= -1 \end{aligned}\right. ,\quad (S_2)\left\{\begin{aligned} x + z &= 1\\ x + y &= 2\\ y + mz &= 1 \end{aligned}\right. .$$

Exercice n°3

1. Déterminer l'ensemble E des solutions de l'équation : $x - 2y - 3z - 5t = 0$.
2. Écrire, sans autres calculs, l'ensemble des solutions de l'équation $x - 2y - 3z - 5t = 1$.
3. Y a-t-il une équation dont l'ensemble des solutions s'écrive $(1, -1, 0, 1) + E$?

Exercice n°4 Résoudre par deux méthodes différentes (Pivot de Gauss, Substitution) les systèmes suivantes :

$$(S_1)\left\{\begin{aligned} x + y + z &= 0\\ -2x + 5y + 2z &= 0\\ -7x + 7y + z &= 0 \end{aligned}\right. ,\quad (S_2)\left\{\begin{aligned} y - 2z &= 3\\ x + 2y - 3z &= -1\\ 2x - y + z &= -15 \end{aligned}\right. ,\quad (S_3)\left\{\begin{aligned} x + 2y + z &= 1\\ 2x + y + 2z &= 2\\ x + y + z &= 1 \end{aligned}\right.$$

$$(S_4)\left\{\begin{aligned} x + y - z &= 1\\ x - y + z &= 1\\ -x + y + z &= 1 \end{aligned}\right. ,\quad (S_5)\left\{\begin{aligned} y - 2z &= 3\\ x + 2y - 3z &= -1\\ 2x - y + z &= -15 \end{aligned}\right. ,\quad (S_6)\left\{\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 8\\ 2x + 3y - 3z &= 4\\ x - 3y - 5z &= -6\\ 4x + 4y + 6z &= 18 \end{aligned}\right.$$

$$(S_7)\left\{\begin{aligned} a + 2b + c + d &= 0\\ a + b - c - d &= 8\\ 2a + b + c + d &= -1\\ -a + b + c - 2d &= -2 \end{aligned}\right. ,\quad (S_8)\left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1\\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 1\\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 1 \end{aligned}\right. ,\quad (S_9)\left\{\begin{aligned} x + y + z + t &= 1\\ 3x + 2y + 2z + 2t &= 0\\ 2x + y + 2z + 2t &= 2 \end{aligned}\right.$$

Exercice n°5 Résoudre selon le paramètre m les systèmes linéaires suivantes :

$$(S_1)\begin{cases} x - my & = 2 \\ mx - y & = m+1 \end{cases}, \quad (S_2)\begin{cases} x + y + mz & = 1 \\ 2x + z & = 2 \end{cases}, \quad (S_3)\begin{cases} x - my + m2z & = m \\ mx - m2y + mz & = 1 \\ x + y + m^3 z & = 1 \end{cases}$$

Exercice n°6 On considère

$$(S_1)\begin{cases} x - 5y & = 2 \\ x - y + t & = 0 \\ 2x + y - 2t & = 1 \end{cases}, \quad (S_2)\begin{cases} x + y & = 1 \\ 2x - 3 & = 2 \end{cases}, \quad (S_3)\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que les systèmes ci-dessous sont des systèmes de Cramer.
2. En utilisant la notation matricielle, résoudre les systèmes ci-dessus.

Exercice n°7 Le système (S) ci-dessous de second membre quelconque est-il de Cramer ? Si oui, exprimer la solution de ce système.

$$(S)\begin{cases} -x + 2y - 8z & = a \\ 3x + y + 3z & = b \\ 2x + 7z = c \end{cases}$$

Exercice n°8 Soit le système

$$(S)\begin{cases} x + ay + a^2 z & = 1 \\ x + by + az & = a \\ bx + a^2 y + a^2 bz & = a^2 b \end{cases}$$

de trois équations à trois inconnues réelles x, y et z où a et b sont des paramètres réels.

1. A quelle condition portant sur a et b, ce système est-il de Cramer ?
2. Étudier et discuter les solutions de ce système lorsqu'il n'est pas de Cramer.