L1-MASS - Analyse II

Feuille de travaux dirigés N° 1

Rappel sur les suites réelles

Enseignant : H. El-Otmany **A.U.** : 2013-2014

Exercice n°1 Déterminer la limite, si celle ci existe, des suites suivantes :

$$a_n = \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n},\ n \geqslant 0 \quad ; \quad b_n = \sqrt{n^2+2n+1} - \sqrt{n^2-2n-1},\ n \geqslant 0$$

$$c_n = \frac{n - \sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2-1}},\ n \geqslant 1 \quad ; d_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k,\ n \geqslant 0$$

$$p_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ n \geqslant 1 \quad ; \quad q_n = \frac{\sin n}{n+(-1)^{n+1}},\ n \geqslant 1$$

$$r_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n},\ n \geqslant 2 \quad ; \quad s_n = \frac{e^n}{n^n},\ n \geqslant 1$$

Exercice n°2 On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_n = \dfrac{n}{n+1}u_n + \dfrac{4}{n+1}$.

1. Calculer u_2.
2. Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = nu_n$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison de (v_n).
3. En déduire l'expression de (v_n) en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.
4. En déduire que la suite (u_n) est strictement monotone et bornée.

Exercice n°3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $S_n(p) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k^p}{k^{p+1}+1}$ pour tout entier $p \geqslant 1$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $S_{2n}(p) - S_n(p) \geqslant \dfrac{1}{4}$, $\forall p \geqslant 1$.
2. En déduire que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} S_n(p) = +\infty$, $\forall p \geqslant 1$.

Exercice n°4 On considère la suite (u_n) de nombre réels définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} & 0 < u_0 \leqslant 1, \\ u_{n+1} = & \dfrac{u_n}{2} + \left(\dfrac{u_n}{2}\right)^2,\ \forall n \geqslant 1. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1$.
3. Montrer que la suite (u_n) est monotone. En déduire que la suite est convergente.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice n°5 Soit $\alpha > 0$ et soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 > 0$ et

$$u_n \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{\alpha}{u_n}\right),\ n \geqslant 0.$$

1. Montrer que
$$u_{n+1}^2 - \alpha = \frac{(u_n^2 - \alpha)^2}{4u_n^2}.$$
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n \geqslant \sqrt{\alpha}$ et que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
4. En appliquant l'identité remarquable à $u_{n+1}^2 - \alpha$, donner une majoration de $u_{n+1} - \sqrt{\alpha}$ en fonction de $u_n - \sqrt{\alpha}$.
5. Si $u_1 - \sqrt{\alpha} \leqslant k$ et pour $n \geqslant 1$, montrer que
$$u_n - \sqrt{\alpha} \leqslant 2\sqrt{\alpha}\left(\frac{k}{2\sqrt{\alpha}}\right)^{2^{n-1}}.$$
6. Application : calculer $\sqrt{10}$ avec une précision de 8 chiffres après la virgule, en prenant $u_0 = 3$.

Exercice n°6 Soit (S_n) la suite définie par $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. En utilisant une intégrale, montrer, pour tout $n > 0$, l'inégalité suivante :
$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$
2. Montrer que $\ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant \ln(n) + 1$.
3. Déterminer la limite de S_n.
4. Montrer que la suite de terme général $u_n := S_n - \ln(n)$ converge (*indication : on montrera que* $(u_n)_{n>0}$ *est décroissante*.

Exercice n°7 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on considère $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.

1. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. En déduire que la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, est convergente.

Exercice n°8 Soit (u_n) une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n < 1$.

1. Étudier la nature de la suite (v_n) telle que $v_n = \prod\limits_{i=0}^{n} u_i$, $n \in \mathbb{N}$.
2. On suppose maintenant qu'il existe $q \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < q < 1$. Déterminer la limite de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Soit (a_n) une suite à termes positifs et borné. On définit la suite (w_n) par :
$$\begin{cases} w_0 = & a_0, \\ w_n = & \sum\limits_{k=0}^{n} a_k u_k^k, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

   Étudier la suite (w_n).

Exercice n°9 Soit (u_n) la suite de nombres réels définie pour tout $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} E(\sqrt{n}).$$

Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice n°10 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite, notée e.
2. Montrer que e est irrationnel.

Exercice n°11

1. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = u_n + a^n, \end{cases}$$

   où a est un réel donné.
2. Généraliser le résultat au cas où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C} \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = u_n + v_n, \end{cases}$$

   avec v_n est une suite donnée.