
Exercice n°1 Étudier la convergence des séries numériques suivantes en calculant leur somme.

$$(a) \sum_{n\geqslant 1} \frac{2^{n+1}}{3^n} \qquad (b) \sum_{n\geqslant 1} \frac{n+1}{n!} \qquad (c) \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)} \qquad (d) \sum_{n\geqslant 1} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \qquad (e) \sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$$

Exercice n°2

1. Étudier les séries $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}$.
2. Étudier les séries $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ et $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice n°3 Établir la divergence des séries suivantes :

$$(a) \sum_{n\geqslant 0} n! \qquad (b) \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \qquad (c) \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\right)$$

Exercice n°4 Trouver la nature des séries numériques, en utilisant le critère indiqué, dont le terme général u_n est donné par :

1. *Critère de comparaison* :
$$(a)\ u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad (b)\ u_n = \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),\ \alpha > 0 \qquad (c)\ u_n = \ln\left(1+\frac{1}{3^n}\right) \qquad (d)\ u_n = e^{-\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)}$$
2. *Critère d'Alembert* :
$$(a)\ u_n = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n\cdot n!} \qquad (b)\ u_n = \frac{n^n}{n!} \qquad (c)\ u_n = (n+1)^3 \sin\left(\frac{\pi}{5^n}\right) \qquad (d)\ u_n = \frac{a^n}{n^n},\ a > 0$$
3. *Critère de Cauchy* :
$$(a)\ u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \qquad (b)\ u_n = \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \qquad (c)\ u_n = \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{-n^2} \qquad (d)\ u_n = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{2n}$$
4. *Critère de Raabe et Duhamel* : Soit (u_n) une série à termes dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
Montrer que :
— Si $\alpha > 1$, alors la suite (u_n) converge.
— Si $\alpha < 1$, alors la suite (u_n) diverge.

Exercice n°5 Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes dont le terme général u_n est donné ci-dessous :

(a) $u_n = \dfrac{n}{n^3+3}$

(b) $u_n = \dfrac{1}{n!}$

(c) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+2\sqrt{n}}$

(d) $u_n = \dfrac{n^4+3n^2-n+1}{n^4+10n-2}$

(e) $u_n = n\sin(\dfrac{2}{n})$

(f) $u_n = \dfrac{\ln(n^n)}{n!}$

(g) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

(h) $u_n = \dfrac{(-1)^n+n}{n^2+1}$

(i) $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+2n+3}{n^2+n-10}\right)$

(j) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Exercice n°6 Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

(a) $u_n = \left(\dfrac{1}{n!}\right)^{\sqrt{n}}$

(b)$u_n = \dfrac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$

(c) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+2\sqrt{n}}$

(d) $u_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$

Exercice n°7 Trouver la nature des séries numériques, selon les paramètres $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, dont le terme général u_n est donné ci-dessous.

(a) $u_n = \dfrac{a^n}{n^\alpha}$ (b)$u_n = \dfrac{3n+n}{a^n}$ (c) $u_n = n^\alpha e^{-\sqrt{n}}$ (d) $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$

Exercice n°8 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réel positifs tel que $\sum u_n$ soit convergente.

1. Montrer que le suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, c'est-à-dire que $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
2. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{u_n}{1-nu_n}$.
3. Monter que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n(u_n-u_{n+1}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Exercice n°9 Étudier la convergence absolue et la semi-convergence des séries suivantes :

(a) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin(\alpha n)}{n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (b) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n^2+\ln(n)}$ (c) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\cos^2(n)}{n}$ (d) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \sin\left(n\pi+\dfrac{1}{n}\right)$