# FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 3

suite et séries de fonctions

**Enseignant** : H. El-Otmany **A.U.** : 2013-2014

---

**Exercice n°1** Étudier les suites de fonctions suivantes ( convergence simple, convergence normale, convergence uniforme ) :

(1) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(x) = n^{-2}xe^{-nx^2}$ (2) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

(3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(x) = \dfrac{1}{n+n^3x^2}$ (4) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$

(5) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$ (6) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) = \dfrac{cos(n^2x+2)}{1+nx}$

(7) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$ (8) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) = \dfrac{e^{nx}}{3^n}$

(9) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x^2}$ (10) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) = \left(\dfrac{x^n}{n} - \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)$

**Exercice n°2**

1. Étudier les séries de fonctions de terme général $f_n$ donné dans l'exercice n° 1 ( convergence simple, convergence normale, convergence uniforme ).
2. Déterminer les fonctions $f(x)$ et $f'(x)$ si elles existent.

**Exercice n°3**

1. étudier la convergence uniforme de la série de fonction $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2x+n^3}$, $(n \geqslant 1)$ sur $\mathbb{R}^+$
2. Montrer que la somme $S(x)$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

**Exercice n°4** Soit $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x}$ définie sur $\mathbb{R}$

1. étudier l'ensemble de définition, la continuité et la dérivabilité de la série de terme général $f_n(x)$
2. Trouver un équivalent de la somme $f(x)$ en $+\infty$.

**Exercice n°5** Calculer la limite quand $n$ tend vers l'infini des suites.

$$u_n = \int_0^{\pi/4} \tan(x)^n \, dx \quad ; v_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + e^x} \quad ; w_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{n+1}+2} dx$$

**Exercice n°6** On se propose de montrer de façon élémentaire que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$. On note, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $x$ : $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^n x^k$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0,\ 1]$, $S_n(x) = \dfrac{1 + (-1)^n x^{n+1}}{1+x}$.
2. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2) - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx.$$

3. En déduire le résultat.

**Exercice n°7** Soit $(\phi_n)$ une suite de fonctions réels continues sur $[0,1]$ et convergeant simplement sur $[0,1]$ vers une fonction $\phi$.

On définit la suite de fonctions $(f_n)$ sur $[0,1]$ par :

$$\begin{cases} f_n(t) & = & \phi_n(t)\sin^2\frac{\pi}{t} & si \quad t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \\ f_n(t) & = & 0 & si \quad t \in \left[0, \frac{1}{n}\right[ \end{cases}$$

(a) Montrer que la suite $(f_n)$ admet une limite simple $f$ sur $[0,1]$.

(b) On suppose dans cette question que $\phi_n(t) = \dfrac{2nt^2}{2nt+1}$.

1. Déterminer $f$ et $\phi$. Ces fonctions sont-elles continues sur $[0,1]$ ?
2. Déterminer $\sup\limits_{t\in[\frac{1}{n},1]} |\phi_n(t) - t|$.
3. Montrer que $|f(t)| \leqslant \dfrac{1}{n}$ si $t \in [0, \dfrac{1}{n}]$.
4. Déduire de ce qui précède que la convergence de la suite $(f_n)$ est uniforme sur $[0,1]$.

(c) On suppose dans cette question que $\phi_n(t) = \dfrac{n}{n(t+1)+1}$.

1. Déterminer la fonction $\phi$. La convergence de $(\phi_n)$ vers $\phi$ est-elle uniforme sur $[0,1]$.
2. La fonction $f$ est-elle continue sur $[0,1]$ ? Examiner si la convergence de la suite $(f_n)$ est uniforme sur $[0,1]$.

(d) On suppose dans cette question que la suite $(\phi_n)$ converge uniformément sur $[0,1]$ et que $\phi(0) = 0$. Montrer que la suite $(f_n)$ converge uniformément sur $[0,1]$.

**Exercice n°8** Montrer que

1. $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{1+x^k} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{nk+1}$, pour tout $k$ entier positif.
2. $\int\limits_0^1 \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}\, dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

**Exercice n°9**

1. Calculer $\int\limits_0^1 x^n \ln(x)^n\, dx$ pour tout $n$ positif.
2. En déduire que $\int\limits_0^1 x^{-x}\, dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^n}$