FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 4

séries entières

Enseignant : H. El-Otmany **A.U.** : 2013-2014

Exercice n°1 Déterminer le rayon de convergence et la nature pour $x \pm R$ des séries entières ci-dessous.

(1) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{3^n} x^n$ (2) $\sum_{n\geqslant 0} e^{-3n} x^n$

(3) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{9^n(3n+1)}$ (4) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(2n)!}{n!n^n} x^n$

(5) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a^n}{n!} x^n,\ a>0$ (6) $\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(1+\frac{1}{5^n}\right) x^n$

(7) $\sum_{n\geqslant 0} \ln(n)^n x^n,\ a>0$ (8) $\sum_{n\geqslant 0} \left(\sqrt{n}\right)^n x^n$

(9) $\sum_{n\geqslant 0} \ln(n) x^n,\ a>0$ (10) $\sum_{n\geqslant 0} e^{n^{1/3}} x^n$

Exercice n°2 Préciser le domaine de convergence des séries entières suivantes :

(1) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{9^n} x^{2n+1}$ (2) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{3^n+n} x^{3n-1}$

(3) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n(n+1)} x^n$ (4) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^n$

(5) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{2^n} x^n$ (6) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{7^n} x^n$

Exercice n°3 Donner le rayon de convergence R des séries entières suivantes et calculer leurs somme.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n x^{2n+1};\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^n};\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+3}{2n+1}x^n;\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n^2+1}{n!}x^n;\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^n;$$

Exercice n°4 Calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n};\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^n};\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2-3n+2}{2^n};\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{n!};\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{(2n+1)!};$$

Exercice n°5 Calculer le développement en série entière en zéro des fonctions suivantes :

$$f(x)=\frac{1}{(x-1)(x-2)};\quad g(x)=e^x\sin(x);\quad h(x)=\ln(x^2-5x+6);\quad k(x)=\int_0^x \sin(t^2)dt$$

Exercice n°6 Déterminer une solution développable en séries entières de l'équation différentielle

$$2xy'' + y' - y = 0,$$

puis calculer la somme de la série obtenue à l'aide de fonctions élémentaires.

Exercice n°7 Calculer les intégrales suivantes en développant en séries entières les fonctions sous les signes d'intégration.

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ à 10^{-5} près 2) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2} dx$ à 10^{-3} près 3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(x^2\right) dx$ à 10^{-3} près.