L1-MASS - Fonctions de 2 variables

Feuille de travaux dirigés N° 1

Exercices complémentaires

Enseignant : H. El-Otmany — **A.U.** : 2013-2014

Exercice n°1 Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

$$\sqrt{e^{2x}-e^{x}};\quad x^2\tan x;\quad \tan\Big(\frac{2}{\sqrt{x}}\Big);\quad \cos(\sqrt{2x});\quad \cos(\sqrt{x^2+3x+1});\quad \frac{\cos(x)}{5+33\sin(x^2)}$$

$$\sin(4\cos(2x^3-x^2+1));\quad \ln(x^3+\sqrt{x}+1);\quad \ln(2x+\ln x);\quad \ln\Big(e^{2\sin x}+x+\frac{1}{x}\Big).$$

Exercice n°2

1. Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en 0 ?

$$i.\ f(x)=\frac{x}{1+|x|};\qquad ii.\ g(x)=\begin{cases} x\sin x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

2. Les fonctions suivantes sont-elles de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

$$i.\ f(x)=\begin{cases} x^2\sin(\frac{2}{x}) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases};\qquad ii.\ g(x)=\begin{cases} 4x^3\sin(\frac{3}{x}) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

Exercice n°3

1. Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 sur l'intervalle $[x_0,x_0+h]$ des fonctions suivantes :

$$a).\ f(x)=\cos x,\quad \text{avec } x_0=0;\quad b).\ f(x)=\sin x,\quad \text{avec } x_0=\pi.$$

2. Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 sur l'intervalle $[x_0,x_0+h]$ des fonctions suivantes :

$$a).\ f(x)=\tan x,\quad \text{avec } x_0=\frac{\pi}{4};\quad b).\ f(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{1+x},\quad \text{avec } x_0=0.$$

Exercice n°4 Donner le développement limité en 0 à l'ordre n indiqué des fonctions suivantes :

$$e^{\sqrt{3}x}\cos(5x),\ n=3;\quad \frac{2e^x}{\sqrt{1-x}},\ n=3;\quad \sqrt{3+2x^2},\ n=5;$$

$$\ln(x+\sqrt{5+5x^2}),\ n=5;\quad e^{\frac{\sin 2x}{1+2x}},\ n=3;\quad \ln(\cos x+2\sin x),\ n=4$$

Exercice n°5 Donner le développement limité des fonctions suivantes au point x_0 et à l'ordre n indiqués :

$$\sqrt{\tan x}\ \Big(x_0=\frac{\pi}{4},\ n=3\Big);\quad \ln(1+x^{-1})\ (x_0=1,n=3);\quad \frac{\sqrt{x+5}-8}{\sqrt{x+9}-1}\ (x_0=2,n=1).$$

Hammou El-Otmany

Exercice n°6 A l'aide de développements limités, déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x - x}{x^3},\quad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x-1-x}{x^2},\quad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{2x^2},\quad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^{\sin x}-x^2-\sqrt{1+4x}}{\ln(1+x^3)},\quad \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^x-x}{1-x-\ln x}.$$

Exercice n°7

1. La fonction définie sur $]-\pi,\pi[$ par $f(x)=\ln(\cos(\frac{x}{2}))$ admet-elle un extremum local en 0 ? Si oui, de quelle nature ?
2. La fonction définie sur $]-\pi,\pi[$ par $f(x)=\sin(\frac{x}{2})\ln(\cos(\frac{x}{2}))$ admet-elle un extremum local en 0 ? Si oui, de quelle nature ?
3. Donner l'équation de la tangente en $x_0=0$, à la courbe C_f de la fonction f définie par $f(x)=e^{\sin(\frac{x}{2})}$. Déterminer la position locale au voisinage de 0 de C_f par rapport à cette tangente.

Hammou El-Otmany