L1-MASS - FONCTIONS DE 2 VARIABLES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 2

Limites - Continuités

Enseignant : H. El-Otmany **A.U.** : 2013-2014

Exercice n°1 Déterminer tous les couples $(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ pour lesquels il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x, y > 0 \ : \ x^a y^b \leqslant M(x+y).$$

Exercice n°2 Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^2$ et x un point de $\mathbb{R}^2$. On note $d(x,A) = \inf_{a \in A} \|x-a\|$. Montrer que $d \ : \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne.

Exercice n°3 On considère : $f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Montrer que $\forall (x,y) \in D, |f(x,y)| \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
3. En déduire $\lim\limits_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} f(x,y)$.

Exercice n°4 1) Étudier l'existence d'une limite en $(0,0)$ pour les fonctions f suivantes

$$\begin{array}{llll}
\text{a) } f(x,y) = \frac{xy}{x+y} & & \text{b) } f(x,y) = \frac{1+x^2+y^2}{y}\sin y \\
\text{c) } f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} & & \text{d) } f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
\text{e) } f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & & \text{f) } f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{(x^2+y^2)} \\
\text{g) } f(x,y) = x^y. & & \text{h) } f(x,y) = (x+y)\, sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \\
\text{i) } f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}. & & \text{j) } f(x,y) = \frac{e^x-e^y}{x-y}
\end{array}$$

Exercice n°5 Soit $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = g(x)\}$ est un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.

Exercice n°6 Vérifier que les projections canoniques :

$$P_x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad P_y : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x,y) \longmapsto x \qquad\qquad (x,y) \longmapsto y$$

sont continues en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Exercice n°7 Comment faut-il choisir le nombre réel α pour que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

soit continue au point $(0,0)$?

Exercice n°8 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \cos\frac{1}{x} \cos\frac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

Montrer que $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$ n'existent pas, mais $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Exercice n°9 1) Étudier l'existence d'une limite en $(0,0)$ pour les fonctions f suivantes

$$\text{a) } f(x,y) = \frac{xy}{x+y} \qquad \text{b) } f(x,y) = \frac{1+x^2+y^2}{y}\sin y$$

$$\text{c) } f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{(x^2+y^2)} \qquad \text{d) } f(x,y) = x^y.$$

2) La fonction $f : (x,y;z) \longrightarrow \dfrac{xyz}{x+y+z}$ a-t-elle une limite en $(0,0,0)$.

3) La fonction $f : (x,y;z) \longrightarrow \dfrac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$ a-t-elle une limite en $(2,-2,0)$.

Exercice n°10 Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on définit $f_{x,y} : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par pour tout $t \in [-1,1]$, $f_{x,y}(t) = xt^2 + yt$ et $F(x,y) = \sup\limits_{t\in[-1,1]} f_{x,y}(t)$.

1. Calculer $F(x,y)$
2. Étudier la continuité de la fonction F sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice n°11 Montrer que la fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \sqrt{x^2-y^2}$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice n°12 Soit $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues Montrer que $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = g(x)\}$ est un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.

Exercice n°13 Comment faut-il choisir le nombre réel α pour que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

soit continue au point $(0,0)$?

Exercice n°14 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \cos\dfrac{1}{x} \cos\dfrac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

Montrer que $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$ n'existent pas, mais $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Exercice n°15

1. Étudier l'existence d'une limite en $(0,0)$ pour les fonctions f suivantes :

$$a) \quad f(x,y) = \frac{xy}{x+y} \quad b) \quad f(x,y) = \frac{1+x^2+y^2}{2y}\sin y \quad c) \quad f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{(x^2+y^2)}$$

2. La fonction $f(x,y,z) = \frac{xyz}{x+y+z}$ a-t-elle une limite en $(0,0,0)$.
3. La fonction $f(x,y,z) = \frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$ a-t-elle une limite en $(2,-2,0)$.

Exercice n°16
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2+y^2 > 1 \\ -\frac{1}{2}x & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue.

Exercice n°17 Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

Montrer que la fonction F est continue.

Exercice n°18 Soit A une partie convexe non vide de $\mathbb{R}^2$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit a et b deux points de A et y un réel tels que $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$. Montrer qu'il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

Exercice n°19 6 Montrer que

$$\lim_{y\to+\infty} \int_0^1 \left(2xye^{-x^2y}\right)dx \quad \neq \quad \int_0^1 \lim_{y\to+\infty} \left(2xye^{-x^2y}\right)dx.$$

Exercice n°20 Soit $g :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, la fonction définie par $g(y) = \int_0^{\pi/2} \log(y^2\cos^2 x + \sin^2 x)dx$

1. Calculer $g'(y)$
2. En déduire $g(y)$ et $\lim\limits_{y\to 0^+} g(y)$
3. Montrer que $\int_{0^+}^{\pi/2} \log(\sin^2 x)\,dx$ converge et que $0 \leqslant g(y) - \int_{0^+}^{\pi/2} \log(\sin^2 x)\,dx \leqslant y + y(2+\log^2)$
4. En déduire que : $\int_{0^+}^{\pi/2} \log\sin x \quad dx = -\pi\log\sqrt{2}$, $\int_0^{\pi/2} \log\cos x \quad dx = -\pi\log\sqrt{2}$ et $\int_0^{\pi/2} \log(\tan x)\,dx = 0$.

Exercice n°21 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \frac{\cos x - \cos y}{x-y}$$

avec $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad x = y\}$: la diagonale de $\mathbb{R}^2$.
Prolonger f par continuité sur la diagonale Δ.

Exercice n°22 Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \cos\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } sy = 0 \end{cases}$$

Montrer que $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$ n'existent pas mais $\lim\limits_{(x,y)\longmapsto(0,0)} f(x,y) = 0$.

Exercice n°23

1. Montrer que $e^{x-y} = 1 + x + y$ définit implicitement une fonction $\Phi \ : x \longmapsto y = \Phi(x)$ au voisinage de $(0,0)$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\Phi(x)}{x^2}$.